

## Mathematikunterricht in der Grundschule – Gestaltung, Analyse und Bilanz

### 1 Vorbemerkungen

Ohne analytische Tätigkeit ist die Gestaltung des Mathematikunterrichts nur schwer möglich, wenig planmäßig und selten dauerhaft erfolgreich.

Zugleich ist eine Analyse, die nicht von Grundpositionen zur Gestaltung des Mathematikunterrichts ausgeht, Analyseschwerpunkte im Auge hat und auf Konsequenzen ausgerichtet ist, ineffektiv und wenig hilfreich, sondern ein eher zusammenhangloses Aneinanderreihen zufällig gesammelter Fakten.

Vor diesem Hintergrund

- soll hier die Funktion des Mathematikunterrichtes dargestellt werden,
- sollen Hinweise zur Unterrichtsgestaltung gegeben werden und
- soll eine Möglichkeit zur unterrichtsbegleitenden Analyse vorgestellt werden.

Dazu wird für die Klasse 1 beispielhaft ein Analysebogen vorgestellt. Diese Analysebögen wurden für die Klassen 1 bis 4 im Rahmen eines Schulversuches an der Universität Rostock entwickelt und in Schulen in Rostock und Stralsund erfolgreich erprobt.<sup>1</sup>

### 2 Zum Mathematikunterricht in der Grundschule

#### 2.1 Zur Funktion des Mathematikunterrichts in der Primarstufe

Der Mathematikunterricht in der Primarstufe ist Bestandteil eines einheitlichen Bildungsganges vom Elementarbereich bis hin zur Sekundarstufe II.

In der Auseinandersetzung mit elementaren mathematischen Inhalten eignen sich die Kinder hier arithmetisches und geometrisches Können an, welches zu den grundlegenden Kulturtechniken gehört. Die Kinder erwerben Einsichten in lebenslang bedeutsame Konzepte und erfahren zugleich die Mathematik als kulturelle Errungenschaft.

Im Mathematikunterricht der Primarstufe erworbene Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, Gewohnheiten und Einstellungen

- befähigen die Kinder zur Beantwortung elementarer Fragen aus ihrer Umwelt und aus der Mathematik,
- schaffen eine tragfähige Basis für erfolgreiches Lernen im weiterführenden Unterricht nicht nur im Fach Mathematik und
- bahnen Wertschätzung und Verständnis für die Mathematik als eine kulturelle und intellektuelle Errungenschaft der Menschheit an.

Mathematische Aktivitäten besitzen zugleich wesentliche Potenzen für die harmonische Entwicklung des Kindes. Das betrifft insbesondere

- das Wecken von Neugier und Interesse an mathematischen Tätigkeiten, Objekten und Fragestellungen,
- das Wecken der Freude an mathematischen Aktivitäten speziell und an entdeckendem Lernen generell,
- die Förderung der Fantasie und der Kreativität,
- die Denk-, Gedächtnis- und Sprachentwicklung,
- die Befähigung zu und die Gewöhnung an ausdauernde, konzentrierte *Lernarbeit*,
- die Erziehung zu Genauigkeit, Sorgfalt und Eigenverantwortung und nicht zuletzt
- die Entwicklung sozialer Verhaltensweisen.

<sup>1</sup> Vgl. auch: Eichler, K.-P. (Hrsg.); Bohrmann, A.; Liebelt, C.; Mede, K.; Oberländer, F.; Schütze, K.: Denken und Rechnen. – Lehrerband Klasse 1. – Braunschweig: Westermann, 2004

Mein besonderer Dank gilt an dieser Stelle Frau MARGARITA DATSKIV (Dubno/Ukraine) für ihre kritischen Hinweise

## 1.2 Ziele des Mathematikunterrichts der Primarstufe

Ein wesentliches Anliegen des Mathematikunterrichts der Primarstufe besteht in der Entwicklung einer auf *erlebten Erfolgen* basierenden **positiven Einstellung zu mathematikspezifischen Problemen** (etwa zum Lösen neuer Aufgaben, zu Knobelaufgaben, ... ) und **Arbeitsweisen**. Eine solche Einstellung ist die Voraussetzung für die erfolgreiche Arbeit an den nachfolgend detaillierter genannten Zielen.

Im Mathematikunterricht der Primarstufe erwerben die Kinder systemhaft Kenntnisse und Vorstellungen über geometrische Objekte und Relationen, über Zahlen, Zahlbeziehungen und Größen. Sie lernen, diese zu erfassen, zu beschreiben und darzustellen. Die Kinder erwerben Operationsvorstellungen und darauf aufbauendes Können im Rechnen.

Sie erwerben Können im Umgang mit mathematisch bedeutsamen Repräsentationen wie Kalendern, Tabellen, Skizzen, Diagrammen und Übersichtsplänen und anderen Veranschaulichungen. Sie erfassen beispielsweise einfache realitätsnahe Wegepläne (etwa eines Parks) und erkennen die Einheit mit stark schematisierten Plänen (beispielsweise in öffentlichen Verkehrsmitteln).

Die Kinder erweitern ihre Erfahrungen im Umgang mit Symbolen. Unter diesen Symbolen befinden sich die Ziffern, die Operations- und Relationszeichen sowie weitere subjektiv bedeutsame Zeichen, wie sie etwa im Buch, in Anleitungen von Baukästen oder bei Faltanleitungen verwendet werden.

All dieses Können dient letztlich der **Befähigung der Kinder zum Anwenden**: Sie sollen die Fähigkeit erwerben, Erscheinungen und Vorgänge aus ihrer Erfahrungswelt wahrzunehmen, mathematisch zu modellieren, dadurch dem Wesen nach zu erfassen, besser zu verstehen und zu beurteilen. Sie sollen es lernen, Fragen aufzuwerfen, darauf Antworten zu suchen, zu finden und zu bewerten.

Von besonderer Bedeutung ist die Fähigkeit, **neue Aufgaben<sup>2</sup> zunehmend selbstständiger unter Nutzung des wachsenden mathematischen Könnens zu lösen**. Hierzu, wie auch beim Überprüfen und Bewerten von Lösungen und Lösungswegen, sollen die Kinder vielfältige Arbeitsformen kennen lernen und nutzen. Insbesondere das für die Mathematik charakteristische Zurückführen von neuen auf bereits bekannte Aufgaben bzw. das Übertragen bekannter Lösungsverfahren auf neue Aufgaben sollen die Kinder in vielfacher Anwendung erfassen.

Beim **Lösen neuer Aufgaben** erwerben die Kinder wesentliche, über das Fach Mathematik hinaus bedeutsame Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten, Gewohnheiten und Einstellungen, beispielsweise zur Nutzung heuristischer Arbeitsweisen. Sie erkennen beispielsweise, dass systematisches Probieren, Irren, Schlussfolgern aus Irrtümern und Fehlern sowie Korrigieren beim Lösen mathematischer Probleme normal ist.

Die Kinder erwerben die Fähigkeit, unterschiedliche Lösungswege und Lösungen beim Bearbeiten einer Aufgabe (etwa beim Zerlegen oder Zusammensetzen von Figuren, beim Färben, beim Fortsetzen von Mustern, beim Bauen, beim Schätzen, beim Vergleichen von Anzahlen usw.) zu akzeptieren, zu suchen, zu entdecken und zu vergleichen.

Hinsichtlich der Entwicklung der Fähigkeit zur Selbstregulation und Selbstkontrolle als wichtiger psychischer Neubildung erwerben die Kinder insbesondere die Fähigkeiten, die Lösung eines Problems in Beziehung zum Problem zu sehen und Lösungswege nach ihrer Eignung zu beurteilen (War mein Weg erfolgreich? Gibt es bessere Wege? Was sollte ich beim Lösen anderer Aufgaben wieder so machen, was hingegen eher nicht? ... ).

---

<sup>2</sup> Der Begriff „Aufgabe“ wird hier im weitesten Sinne benutzt: Aufgaben sind Anforderungen zum Handeln, welche das Kind mit seinem Wissen und Können lösen oder als unlösbar erkennen kann. Ob eine Anforderung an ein konkretes Kind eine Aufgabe ist, hängt damit auch von dessen Niveau des Könnens ab (Problem der „Passung“ zwischen den subjektiven Voraussetzungen und der objektiven Anforderung).

Die Kinder erweitern ihre Fähigkeiten im Beschreiben, lernen neue sprachliche Formen der Begründung kennen und nutzen **mathematische Fachtermini im umgangssprachlichen Kontext** angemessen. Generell werden Begriffsworte dann genutzt, wenn sie in der Tätigkeit zweckmäßig und notwendig sind, die Beschreibung der Tätigkeit rationeller machen. Auf die Nutzung von anderen Worten an Stelle der Fachworte sollte verzichtet werden. Solche Worte werden zuweilen – fälschlicherweise – als kindgerechter Ersatz für angeblich so schwierige Fachworte wie „Quotient“ usw. genutzt. Man beobachte Kinder, analysiere deren Vokabular (etwa die Kenntnisse über hunderte verschiedener Pokemontarten) und bedenke, dass jedes Umlernen schwieriger als das Neulernen ist.

Von entscheidender Bedeutung für den Unterrichtsfolg ist die **Entwicklung der Lerntätigkeit** als individueller und sozialer Prozess. Im Prozess der Aneignung mathematischer Inhalte ist arbeitsteiliges Arbeiten sowie der Austausch von Ideen zwischen den Kindern, die klassenöffentliche Diskussion und Wertung von Lösungswegen und Lösungen produktiv. Dementsprechend unverzichtbar sind

- die Fähigkeit, eine umfangreichere Aufgabe durch sinnvoll arbeitsteiliges Handeln in Partner- oder Gruppenarbeit zu bearbeiten und die Teilergebnisse zu einem Gesamtergebnis zu integrieren,
- die Fähigkeit zum Umgang mit Erfolg und Misserfolg im sozialen Kontext, die Fähigkeit, zu akzeptieren, dass man selbst oder ein anderer eine Aufgabe (noch) nicht oder nicht so gut lösen kann,
- die Gewöhnung an die unterschiedlichen Lösungswege verschiedener Kinder; an die Akzeptanz verschiedener Wege als Möglichkeiten,
- die Befähigung zu und die Gewöhnung an die sachorientierte Diskussion über verschiedene Lösungswege als eine Form des Lernens miteinander und voneinander,
- die Entwicklung der Bereitschaft und der Fähigkeit, sich in die Gedanken und Lösungswege eines anderen Kindes hineinzuversetzen,

Die Kinder erwerben im Mathematikunterricht zum einen **Arbeitstechniken im handwerklich-praktischen Sinne**: Schneiden auf dem Riss, Ausschneiden, Reißen, Falten, Zusammenkleben, Aufkleben, Malen, Ausmalen, Umranden, Markieren, Skizzieren, Zeichnen mit Schablonen, usw. Dies geht einher mit der Entwicklung entsprechender feinmotorischer Fähigkeiten und Fertigkeiten.

Die Kinder erwerben zugleich **Techniken und Fähigkeiten** zur geistigen Arbeit, die über das Fach Mathematik hinaus nutzbar sind:

- Die Fähigkeit, Objekte, deren Eigenschaften und Beziehungen zueinander sowie Prozesse aus der Erfahrungswelt
  - qualitativ und quantitativ wahrzunehmen,
  - wiederzuerkennen,
  - wiederzugeben / zu beschreiben,
  - in elementarer Weise begrifflich zu modellieren,
  - zu verstehen, zu erklären, zu begründen und zu beurteilen,
- Die Fähigkeit zum (gedanklichen oder realen) Sortieren, zum Analysieren, zum Vergleichen, Klassifizieren, zum Abstrahieren, zum Verallgemeinern, zum Konkretisieren,
- Die Fähigkeit zur Vorstellung von Objekten und Prozessen,
- Die Fähigkeit zum räumlichen Orientieren,
- Die Fähigkeit zum räumlichen Denken

Die Kinder erwerben nicht zuletzt **Fähigkeiten zum willkürlichen Einprägen** und dem damit verbundenen Organisieren des Einzuprägenden. Dazu sind Kenntnisse über Techniken des willkürlichen Einprägens grundlegend. Die Kinder sollen es nach und nach lernen,

- sich den Sinn des Einzuprägenden zu erschließen (Was bedeutet das? Warum ist es so wichtig, dass ich es mir merken muss?),
- Sinnzusammenhänge zu konstruieren und zu rekonstruieren: (Was fällt dir zu ... ein?),
- Kenntnisse auf diese Weise systemhaft zu vernetzen und damit Möglichkeiten ihrer Rekonstruktion im Falle des Vergessens zu schaffen,
- sich Dinge gezielt und willkürlich einzuprägen (z. B. per Teil-für-Teil und Teil-für-Ganzes – Strategie; leises Sprechen; Wiederholen in Ruhephasen usw.),
- selbständig die Beherrschung des Einzuprägenden zu prüfen und es zu wiederholen,
- eine gewisse „innere Ruhe“ beim Einprägen gewohnheitsmäßig herzustellen.

### 1.3 Zur Unterrichtsgestaltung

#### Fundamentale Ideen

Im Mathematikunterricht der Grundschule sollen solide Fundamente für die erfolgreiche Arbeit in den nachfolgenden Schulstufen geschaffen werden. Deshalb kann es nicht darum gehen, dass sich die Schüler Lösungsregeln zu einer Vielzahl scheinbar isolierter Aufgabentypen und Aufgabenformen aneignen. (etwa zu  $27 - \_ = 13$  die Regel „Wenn der Subtrahend gesucht wird, muss man subtrahieren“).

Zwar können auch bei einer Orientierung auf formale und möglicherweise sogar unverstanden eingeprägte Lösungsregeln für den Augenblick in Kontrollsituationen gute Ergebnisse erreicht werden. Langfristig tragfähig ist ein solches Vorgehen jedoch nicht, weil

- derartige formale Regeln nur begrenzt anwendbar sind (Beispielsweise geben Kinder, welche die oben genannte Regel formal nutzen, oft als Lösung von  $30 - \_ = 50$  die Zahl 20 an),
- derartige formale Lösungsregeln meist früher oder später vergessen werden und die Kinder dann keinerlei Möglichkeit zur Rekonstruktion des Lösungsweges haben und
- eine Orientierung auf solche Lösungsregeln nicht zum Lösen neuer Aufgaben befähigt.

Im Zentrum eines spiralförmig angelegten Mathematiklehrganges sollten deshalb statt einer Vielfalt von Aufgabentypen und –formen zentrale, **fundamentale Ideen** stehen, die an verschiedenen Stellen und aus unterschiedlichen inhaltlichen Perspektiven immer wieder aufgegriffen werden können und die dabei – gewissermaßen wie rote Fäden – die Vielfalt der Inhalte strukturieren. Die einzelnen Inhalte werden bei einer derart orientierten Unterrichtsgestaltung nicht mehr relativ isoliert behandelt und rasch wieder vergessen, sondern sinnvoll miteinander vernetzt. Der einzelne Stoff, die einzelne Aufgabe muss dann nicht mit jedem Kind „zu Ende behandelt“ werden, denn *mit den in den Aufgaben enthaltenen bzw. beim Bearbeiten der Aufgaben zum Tragen kommenden fundamentalen Ideen* werden die Kinder immer wieder konfrontiert. Nur so kann Lernen für alle Kinder zum erfolgreichen Weiterlernen werden, kann der Heterogenität der Leistungsniveaus Rechnung getragen werden.

Wesentliche fundamentale Ideen für den Mathematikunterricht ab Klasse 1 werden nachfolgend skizziert.

### Die Idee der Gesetzmäßigkeiten und Muster

Zahlen und geometrische Objekte besitzen vielfältige Beziehungen, die sich in Gesetzmäßigkeiten und Mustern widerspiegeln. Derartige Strukturen – und nicht etwa primär das „Zahlenrechnen“ – sind der eigentliche Lerngegenstand der Mathematik. Die Kinder können

- in Folgen und Mustern Gesetzmäßigkeiten entdecken und diese beschreiben,
- vorgegebene Folgen und Muster passend fortsetzen und selbst Folgen und Muster erfinden,
- Übereinstimmungen von Gesetzmäßigkeiten zweier Folgen bzw. Muster erkennen,
- die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen Größe erfassen, und einfache Zusammenhänge qualitativ und in Ansätzen quantitativ beschreiben sowie
- Formulierungen wie „das Doppelte“ und „die Hälfte“ im umgangssprachlichen Kontext und bezogen auf kleine Anzahlen erfassen.

### Die Idee der Zahl,

Kinder erleben, was Zahlen sind und wozu sie benutzt werden können:

- Mit Zahlen können Anzahlen – etwa durch Zählen – bestimmt und angegeben werden,
- Zahlen sind zuweilen reine Zählzahlen (beispielsweise bei Abzählreimen, beim zweckfreien Zählen ...),
- Mit Zahlen als Ordnungszahlen kann die Reihenfolge von Objekten bestimmt, beschrieben oder festgelegt werden.
- Mit Zahlen kann ein Maß bestimmt, ausgedrückt oder dargestellt werden (z. B. die Länge und Breite eines Gegenstandes).
- Mit Zahlen kann man rechnen. Zahlen können dabei so verknüpft werden, dass diese Verknüpfung einen Sachverhalt beschreibt.
- Zahlen stehen in Relation zu anderen Zahlen, sind **Relationalzahlen**, d.h. das Kind kann sich eine Zahl mit deren Beziehungen zu anderen Zahlen vorstellen. (Beispielsweise ist 4 das Doppelte von 2, die Zahl vor der 5, eine Zahl zwischen 1 und 10, genau die Mitte zwischen 2 und 6 usw. Diese *Zahlbeziehungen* werden primär über Anzahlen oder Maßzahlen erworben),
- Mit Zahlen kann etwas codiert werden (Hausnummer, Telefonnummer).

Die Kinder lernen entsprechend,

- Zahlen entsprechend der Vielfalt dieser Aspekte des Zahlbegriffs in unterschiedlichen Kontexten zu nutzen, zu erfassen und darzustellen,
- Zahlen unter Rückgriff auf die Veranschaulichung mit Mengen zu vergleichen und
- Sachverhalte ihrem Wesen entsprechend mit Termen der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation oder der Division, anschauungsgebunden quantitativ beschreiben.

### Die Idee der Form,

Kinder erfassen und klassifizieren reale Objekte wie Verpackungen, Ziegelsteine, Spielwürfel, Walzen, Murmeln, Tischplatten usw. hinsichtlich ihrer Form (z.B. Würfel, ...). Sie erfassen die Form als eine Eigenschaft von Objekten, die wesentliche über die Verwendbarkeit eines Dinges im täglichen Gebrauch entscheidet.

Die Kinder erwerben Erfahrungen und Einsichten in die unterschiedliche Verwendbarkeit verschiedener geometrischer Objekte zum Bauen, Legen, Auslegen usw. Sie kennen Würfel, Kugel, Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, ...-eck, Kreis, Linie, gerade Linie (Gerade), Punkt und deren Eigenschaften. Die Kinder können diese Objekte erfassen (identifizieren), beschreiben, unterscheiden und auf verschiedene Weise darstellen (realisieren). Sie nutzen dabei die Begriffsworte im umgangssprachlichen Kontext.

### Die Idee der Symmetrie,

Kinder erleben Symmetrien (nicht nur Spiegelsymmetrien) an vielen Objekten der Lebenswirklichkeit. Sie erfassen die Symmetrie dabei auch als eine Eigenschaft, nach der Objekte

geordnet werden können. Sie erleben und erfassen Symmetrien mit Bezug zur Geometrie (etwa in Verbindung zur Spiegelung) und auch in Beziehung zur Arithmetik (beim Verdoppeln bzw. Halbieren).

Die Kinder lernen es, realitätsnahe Abbildung – z.B. die Abbildung einer Spiegelung im Wasser – zu betrachten, Objekt und Spiegelbild in Einheit zu erfassen und das Spiegelbild auf eventuell enthaltene Fehler zu überprüfen. Sie können mit einem Spiegel prüfen, ob eine Figur symmetrisch ist, symmetrisch gefärbt ist und usw. Sie können in ebenen Figuren Spiegelachsen erkennen.

Das Kind erkennt die Nützlichkeit der Symmetrie beispielsweise bei einem Drachen, einem Flieger und kann diese Symmetrie z.B. bei einem selbst gefalteten Papierflieger realisieren. Das Kind kann Figuren mit einer Spiegelachse herstellen und mit Symmetrien wie auch mit deren bewusster Abänderung oder Missachtung künstlerisch gestalten.

### Die Idee der Beziehung von Teil und Ganzem,

Kinder erfassen, dass es vielfältige Beziehungen zwischen einer Menge und deren Elementen, zwischen Obermenge und Teilmenge, zwischen Oberbegriff und Unterbegriff usw. gibt: So sind Eigenschaften, die für eine Gesamtheit gelten, auch für jedes ihrer Teile gültig, nicht aber notwendigerweise umgekehrt. So sind Rechtecke Vierecke mit vier rechten Winkeln. Quadrate als besondere Rechtecke haben diese Eigenschaft auch. Umgekehrt hat aber nicht jedes Rechteck vier gleich lange Seiten. Derartige Beziehungen sollen die Kinder an vielen Beispielen erfassen und exemplarisch, mit den Mitteln der Umgangssprache und unter Nutzung erster Fachworte beschreiben.

Die Kinder erwerben diesbezüglich **Können**, sie lernen

- Objekte hinsichtlich ihrer Eigenschaften zu vergleichen, zu ordnen, zu klassifizieren,
- Objekte nach vorgegebenen Merkmalen zu sortieren,
- Eigenschaften von Objekten zu beschreiben und zu begründen,
- gemeinsame Merkmale aller Elemente einer Menge herauszufinden und zu beschreiben,
- zu abstrahieren und zu konkretisieren,
- Mengen nach vorgegebenen Merkmalen zu bilden,
- sich Objekte und Mengen von Objekten nach Vorgabe der Eigenschaften vorzustellen,
- die Beziehungen (Teilmengebeziehung, Disjunktheit von Mengen, überschneidende Mengen, Gleichmächtigkeit, unterschiedliche Mächtigkeit) zwischen zwei gegebenen Mengen zu erkennen und mit dem Verweis auf konkrete Elemente zu begründen,
- Beziehungen zwischen Mengen im Alltagskontext sprachlich zu erfassen und selbst zu beschreiben. Dabei werden Wörter wie „und“, „oder“, „nicht“, „genau so viele ... wie...“, „mehr als“ und „weniger als“ im umgangssprachlichen Kontext verwendet.
- sich diese Beziehungen zwischen zwei Mengen *vorzustellen*,
- zu entscheiden, welche Menge mehr Elemente hat,

Die Kinder lernen es, Mengenoperationen *in vielfältigen Sachsituationen* zu erfassen und die dabei zum Tragen kommenden Zahlbeziehungen auch *verallgemeinernd* zu beschreiben („Immer dann, wenn zu drei *Dingen* noch zwei andere hinzukommen, sind es fünf *Dinge*.“). Derartige Mengenoperationen sind:

- die **Vereinigung** zweier disjunkter Mengen,
- die **Differenzmengenbildung**,
- das **Zerlegen von Mengen** in gleichmächtige, paarweise disjunkte Teilmengen,
- die **Vereinigung von paarweise disjunkten, gleichmächtigen Mengen (multiplikativ)**.

Die Kinder sollen dabei sowohl mit räumlich-simultanen (statischen) und zeitlich-sukzessiven (dynamischen) Beispielen arbeiten, die sich in Alltagssituationen ergeben:

- Statisch: Betrachten und Beschreiben einer Situation, einer Objektgruppierung
- Dynamisch: Beobachten und Beschreiben eines Prozesses

### **Die Idee der funktionalen Abhängigkeit,**

Die Kinder erfahren, dass es zwischen

- den Eigenschaften von Objekten der Realität,
- Größen in der Realität oder auch
- den Zahlen in einer Aufgabe

vielfältige Beziehungen gibt. Sie erleben an Beispielen,

- dass zuweilen eine Größe (eine Zahl) wächst, wenn eine andere Größe (eine andere Zahl) wächst. Zuweilen ist der Zuwachs sogar gleichmäßig, d.h. beide Größen (bzw. beide Zahlen) sind dann zueinander proportional: Je mehr Eimer Wasser in das Aquarium gegossen werden, desto höher steigt dort der Wasserspiegel; der Anstieg ist bei jedem hinzugefügten Eimer der gleiche,
- dass zuweilen eine Größe (eine Zahl) größer wird, wenn eine andere Größe (eine andere Zahl) kleiner wird (wird z.B. etwas aufgeteilt, dann erhält jedes Kind umso mehr, je weniger Kinder es sind) und
- dass es auch andere Zusammenhänge zwischen zwei Größen gibt, die zweifellos bestehen, aber nicht so einfach beschreibbar sind (etwa die Temperatur in Abhängigkeit von der Tageszeit).

In der Auseinandersetzung mit funktionalen Abhängigkeiten erwerben die Kinder die Fähigkeit, Ursache-Wirkungs-Beziehungen zu analysieren, experimentell zu untersuchen und zu beschreiben. Die Kinder lernen es, eine Größe systematisch zu verändern und dabei die Änderung einer anderen Größe zu erfassen. Derartige Betrachtung werden mit Größen gemacht, sind aber auch im Prozess des Übens an Aufgabenformaten wie beispielsweise an Zahlenmauern und Rechentreppen unverzichtbar.

### **Die Idee der räumlichen Strukturierung**

Die Kinder erfassen unsere Umwelt als dreidimensionalen Raum. Ihre Auseinandersetzungen mit der Umwelt beinhalten damit stets Auseinandersetzungen mit der Räumlichkeit der uns umgebenden Welt. Dies beinhaltet u.a. Fähigkeiten zum räumlichen Wahrnehmen, Vorstellen und Darstellen bezogen auf Objekte, bezogen auf Lagebeziehungen zwischen Objekten und bezogen auf Prozesse.

Die Kinder erwerben hierbei insbesondere folgendes Können:

- Die Fähigkeit, (räumliche) Objekte zu untersuchen, ihre Eigenschaften zu erfassen und zu beschreiben, die Figuren zu benennen und herzustellen.
- Die Fähigkeit, Objekte zu betrachten und Prozesse zielgerichtet zu beobachten. Dabei können die Kinder Formen und Gegenstände gedanklich vom Hintergrund hervorheben (Figur – Grund – Wahrnehmung).
- Die Kinder können Objekte in der Realität und in Abbildungen (wieder)erkennen und deren Lage beschreiben (... ist links von ... und über ...). Dieses Wiedererkennen gelingt auch in
  - anderen Zusammenhängen,
  - anderen räumlichen Lagen und Anordnungen,
  - anderen Größen und Farben,
  - einer Darstellung mit leicht veränderter Perspektive,

- Die Kinder können Lagebeziehungen erfassen und beschreiben:
  - Lagebeziehungen am eigenen Körper (rechte Hand ...),
  - Lage eines Objektes bezogen auf den eigenen Körper („Links von mir ist ...“)
  - Lagebeziehungen zwischen zwei Objekten (Was ist rechts über dem Fenster?),
- Sie können sich (geometrische) Objekte, einfache räumliche Lagebeziehungen und einfachste geometrische Relationen auf der Grundlage taktiler Wahrnehmung, ebener Darstellung oder verbaler Beschreibung vorstellen:
  - Objekte passend zu vorgegebenen Lagebeziehungen anordnen,
  - sich real handelnd im Raum zurechtzufinden,
  - sich gedanklich im Raum orientieren.
- Die Kinder vermögen in ersten Ansätzen räumlich denken. Sie können zunehmend
  - die Lage oder die Form der Objekte gedanklich verändern,
  - Objekte gedanklich verschieben, drehen, verformen, zerlegen, umordnen

### Die Idee des Messens,

Kinder erfahren an vielen konkreten Beispielen, dass Objekte qualitative Eigenschaften (z.B. Länge, Fläche, Volumen, Masse usw.) besitzen, von denen einige quantitativ verglichen und ausgedrückt werden können. Sie sammeln Erfahrungen, wie der reale oder gedankliche Vergleich durch Messen erfolgt. Die Kinder erfassen hier, dass willkürliche Einheiten wie Handspanne oder Schrittlänge oft durchaus brauchbar sind, aber Grenzen haben und dass normierte Einheiten deshalb oft unverzichtbar sind. Sie erleben in unterschiedlichen praktischen Situationen verschiedene, mehr oder weniger genaue Techniken des Messens kennen und erleben beispielgebunden, dass bei kleinerer Maßeinheit die Maßzahl größer wird.

Die Kinder erweitern ihre oft bereits bei Schuleintritt vorhandenen Konzepte zum Vergleichen von Längen, Flächen und Volumina, Massen und Zeiten. Sie sammeln und vertiefen Erfahrungen womit und in Ansätzen wie man Längen, Flächen, Volumina, Massen und Zeiten messen kann.

Bei entsprechenden Aktivitäten sollen die Kinder realistische Größenvorstellungen<sup>3</sup> zu ausgewählten Größen der Größenarten Zeit, Länge, Fläche, Währung, Masse und Volumen erwerben.

Hinsichtlich der Zeit erwerben die Kinder Einsichten zum Ablauf der Jahreszeiten, der Monate, der Wochentage, des Datums und der Uhrzeit. Sie kennen den Monatskalender und die (analoge) Uhr und lernen sich daran zu orientieren. Die Kinder kennen subjektiv bedeutsame Tageszeiten und Daten im Jahr und können diese im Tagesablauf bzw. im Jahr (auch jahreszeitlich) verorten.

Die **Konzentration auf fundamentale Ideen** bietet die Möglichkeit,

- Lernen als Weiterlernen zu gestalten, bei dem an vorhandene Erfahrungen angeknüpft und einmal Betrachtetes nicht als abgeschlossen angesehen wird,
- Inhalte in individuell unterschiedlicher Tiefe, vom zeitlichen Umfang her flexibel und methodisch variabel zu bearbeiten,
- der Leistungsheterogenität der Schüler einer Klasse durch differenzierende Förderung *aller* Schüler gerecht zu werden,
- dass sich die Schüler die Beziehungen zwischen den verschiedenen mathematischen Inhalten, wie beispielsweise die Verbindung von Arithmetik- und Geometrieteil, erschließen,

---

<sup>3</sup> Hier geht es nicht primär um die Vorstellung einer Größe gemessen in normierten Einheiten, sondern vor allem um Relationen zwischen Größen einer Größenart. Die Kenntnis solcher Beziehungen ermöglicht Aussagen wie „... ist schwerer als ...“, „... ist länger als ...“, „... dauert länger als ...“ usw. mit Bezug zum täglichen Leben.

- die vielfältigen Bezüge einzelner Inhalte zu außerunterrichtlichen Erfahrungen und den Inhalten anderer Fächer anwendungsorientiert zu nutzen.

Ausgangspunkte mathematischer Aktivitäten sollten möglichst immer **situative Kontexte** mit Bezug zur Alltags- und Umwelterfahrung der Kinder sein.

**Substantielle Problemstellungen** ermöglichen entdeckendes Lernen und eine differenzierende Bearbeitung in individuell unterschiedlicher Tiefe.. Dabei werden Probleme zunächst von jedem individuell erfasst. Erste Erkenntnisse, Einsichten und Vermutungen werden entwickelt, welche erst dann in Partner- und Gruppenarbeit diskutiert, verbessert und vervollkommen werden können.

Beim Bearbeiten von Aufgaben werden **Methoden des Problemlösens**, wie systematisches Probieren - welches Versuchen, Irren und Korrigieren beinhaltet - Tabellieren, Skizzieren, Verbalisieren, sowie das Entwickeln von Strategien und das Finden von Erkenntnissen und Kontrollmethoden entwickelt, thematisiert und angewendet. Dabei sollten die Freude am Ausprobieren und das Interesse am Strukturieren gefördert werden.

Lernen von Mathematik ist dabei stets ein Prozess der **aktiven eigenen Sinnkonstruktion** jedes Einzelnen, welcher dabei das Anzueignende für sich selbst rekonstruiert. Das setzt eine auf den Aneignungsgegenstand gerichtete entwicklungsgerechte geistige Tätigkeit der Kinder voraus. Nur über die Sicherung geistiger Aktivität der Kinder ist es möglich, deren Subjektposition zu entsprechen und Unterrichtsergebnisse effektiv zu erreichen. Nach *K. WEBER* und *G. FANGHÄNEL* ist ein geeignet gestaltetes **Arbeiten mit Aufgaben** das Hauptmittel zur Sicherung dieser geistigen Aktivität.

Zur Klassifizierung von mathematischen Aufgaben ist es sinnvoll, Aufgabentypen und –formen zu unterscheiden. Der **Aufgabentyp** (beispielsweise „Addition zweier einstelliger Zahlen mit Überschreiten der Zahl 10“) widerspiegelt dabei das mathematische Wesen einer Aufgabe, während die **Aufgabenform** (beispielsweise „Term“, „Tabelle“ ...) die Erscheinung dieser Aufgabe widerspiegelt. „Arbeiten mit Aufgaben“ ist als ein komplexer Prozess aufzufassen, der sowohl Tätigkeiten der Lehrerin<sup>4</sup> als auch des Schülers in deren Wechselverhältnis einschließt.

**Arbeiten mit Aufgaben** als Tätigkeit des Schülers umfasst hauptsächlich das Bearbeiten der Aufgaben, wobei Bearbeiten hier ebenfalls im weitesten Sinne zu sehen ist, also auch das Stellen von Aufgaben – etwa in Partnerarbeit – einschließen kann.

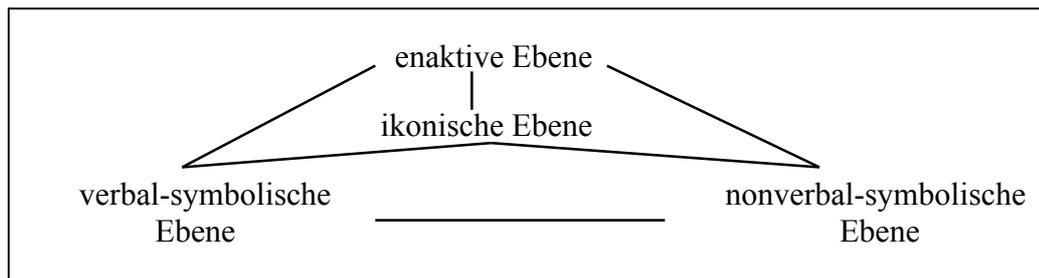
**Arbeiten mit Aufgaben** als Tätigkeit der Lehrerin umfasst

- die Auswahl der Aufgaben,
- die Anordnung der Aufgaben,
- das Stellen der Aufgaben im Unterricht,
- das Ingangsetzen und Inanghalten des Prozesses der Aufgabenbearbeitung bis hin zur
- Initiierung einer Phase der – individuellen oder klassenöffentlichen – Rückbesinnung sowohl auf das Ergebnis (Was bedeutet das Ergebnis? Ist das Ergebnis plausibel? Entspricht das Ergebnis den Erwartungen ...) als auch auf den Lösungsweg (was war sinnvoll, was sollte bei anderen Aufgaben ebenfalls probiert werden, was war ungünstig).

---

<sup>4</sup> Wenn hier und an anderen Stellen von Lehrerinnen gesprochen wird, mögen sich alle emanzipierten Lehrer ebenso angesprochen fühlen.

Nach J. BRUNER vollziehen sich das Lernen und damit das Arbeiten mit Aufgaben im Mathematikunterricht auf drei Ebenen:



Auf der **enaktiven Ebene** werden gestellte Probleme durch äußere Handlungen probierend, forschend und unter Zuhilfenahme von Materialien gelöst. Bereits hier kann zwischen Handlungen mit konkreten und Handlungen mit semikonkreten Objekten, die als Stellvertreter für die konkreten Objekte fungieren, unterschieden werden.

Die **ikonische Ebene** der bildhaften Darstellung und Vorstellung stellt eine erste Stufe der Verinnerlichung und Abstraktion dar. Die äußere Handlung wird – zunächst sehr realitätsnah, dann mehr und mehr mit vereinfachenden Symbolen – ins Bildhafte übertragen. Dabei sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

1. Zeichnen der Kinder als modifizierte Tätigkeit
2. Arbeiten am fertigen Bild als einer „Momentaufnahme“ der Tätigkeit

Auf der **symbolischen Ebene** sollen die Kinder im Laufe der Grundschulzeit die Fähigkeit erwerben, Begriffe und Symbole aus der mathematischen Fachsprache zu verstehen und zu gebrauchen. Die Unterscheidung zwischen verbal-symbolischer und nonverbal-symbolischer Ebene ist wesentlich. Verbal-symbolische Repräsentationen sind beispielsweise alle Sachaufgaben. Gerade hier fällt es Kindern oft schwer, zum Sachverhalt die passende Gleichung, also die nonverbal-symbolische Entsprechung zu finden. Hilfreich kann dann ein Übergang von der verbalsymbolischen zunächst zur ikonischen Ebene sein: Skizzieren zu einem Sachverhalt liefert diesen Übergang. Anschließend kann der Übergang zur nonverbal-symbolischen Ebene erfolgen, indem ein zur Skizze passender Term gebildet wird.

Bei der Gestaltung des Mathematikunterrichtes ist es wichtig, alle drei Ebenen zu berücksichtigen. Insbesondere dürfen enaktive und ikonische Ebene nicht als „flüchtig zu durchlaufende Durchgangsstadien“ auf dem Weg zur symbolischen Ebene angesehen werden. Vielmehr sind die Übergänge zwischen den Ebenen der Lerntätigkeit für die Kinder in *beiden* Richtungen gangbar zu machen. Nur so wird gesichert, dass die Kinder beim Lösen einer in der symbolischen Ebene gestellten Aufgabe gegebenenfalls selbständig in die ikonische oder die enaktive Ebene wechseln können.

Typische Situationen dazu gibt es viele: Beispielsweise sollte jedes Kind, welches den Inhalt einer Operation verstanden hat, auch neue Aufgaben lösen und beim Lösen gegebenenfalls skizzieren oder Material benutzen können.

Generell sollen die Kinder befähigt werden, auf diese Weise Lösungswege zu beschreiben, und Lösungen zu begründen. Den Weg dahin bahnen Anforderungen wie:

- Lege passend zur Aufgabe (zum Term).
- Zeichne passend zur Aufgabe (zum Term).
- Erzähle eine Geschichte, die zur Aufgabe passt.
- Skizziere passend zum Text.
- Lege passend zum Text (spiele die Geschichte nach usw.).

Die **systematische Entwicklung der Sprache** als einem grundlegenden Mittel geistiger Tätigkeit verdient große Aufmerksamkeit. Indem sprachliche Äußerungen der Schüler angeleitet, angeregt und ermöglicht werden, ist die Lehrerin in der Lage, die geistige Tätigkeit der Kinder zu fördern, zu überprüfen und gegebenenfalls zu korrigieren. Von besonderer Bedeutung auf allen drei Ebenen der Lerntätigkeit ist das **Verbalisieren**. Die Kinder sollen *vor* der Tätigkeit diese gedanklich vorwegnehmend (antizipierend) beschreiben, *während* der Tätigkeit diese kommentieren und *nach* der Tätigkeit in der Phase der Rückbesinnung diese rekapitulierend erläutern und werten.

In allen Phasen und auf allen drei Ebenen der Tätigkeit sollen die Kinder nicht nur zum Beschreiben, sondern auch zum Begründen angeregt werden. Bezüglich der Sprachentwicklung ist zunächst der sachgerechte Gebrauch der Umgangssprache anzustreben. Fachworte sollten dort genutzt werden, wo eine Begriffsnotwendigkeit besteht, wo das Kind also den Nutzen der Verwendung des Begriffswortes erleben kann. Dabei sollten die Begriffsworte so eingesetzt werden, dass ein späteres Umlernen vermieden wird.

Der Wert mathematischen Wissens und Könnens realisiert sich für den Schüler erst in der **Anwendung**, beim Arbeiten mit diesem Wissen und Können. Zugleich findet der im Mathematikunterricht zu durchlaufende individuelle Erkenntnisprozess erst in der erfolgreichen Arbeit mit dem neuen Wissen und Können seinen vorläufigen und relativen Abschluss. Darum ist die Anwendung ein entscheidendes Glied im Aneignungsprozess, welches das vollständige Erkennen und damit die Aneignung des neu Erarbeiteten überhaupt erst ermöglicht.

Die **Befähigung der Kinder zum Anwenden** ist deshalb als das Hauptkriterium für den Unterrichtserfolg anzusehen. Zur Erfüllung dieses Kriteriums müssen alle Phasen des Unterrichts beitragen. Bereits in der Phase der Erarbeitung neuen Stoffes kann durch den gezielten Rückgriff auf vorhandene Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten und Erfahrungen der Schüler deren geistige Aktivität gesichert und eine Voraussetzung für auf inhaltlichem Verständnis basierende Erstfestigung geschaffen werden. Letztlich wird so eine baldige sinnerfüllte Anwendung des Gelernten ermöglicht, die wiederum zu seiner Beherrschung auf höherer Stufe beiträgt. Der Erfolg des Mathematikunterrichtes wird durch ein derartiges aktives Eindringen des Kindes in Neues unter Nutzung vorhandenen Könnens wesentlich begünstigt. Die Möglichkeit und nicht selten sogar die Notwendigkeit dazu ergibt sich aus dem hierarchischen Aufbau des Mathematiklehrganges. Eine solche Vorgehensweise hat zugleich den Vorteil, dass dabei zugleich auch die als „Instrument“ eingesetzten Könnenselemente umfassender, tiefer angeeignet werden. Nicht zuletzt ist es so gut möglich, den Kindern in einfacher Weise und ohne darüber zu theoretisieren, grundlegende Arbeitsweisen der Mathematik, wie etwa das Lösen einer neuen durch Zurückführen auf bekannte Aufgaben, zu zeigen.

Der Erfolg des Unterrichts ist in hohem Maße vom geeigneten Einsatz von Veranschaulichungsmitteln abhängig. Konkrete Handlungen und bildliche Darstellungen können einen **breiten Anschauungshintergrund** liefern.

Indem **verschiedene Veranschaulichungen zu einem mathematischen Sachverhalt** eingesetzt werden, können beim Veranschaulichen mathematischer Inhalte und Verfahren zugleich auch Einsichten in Strukturen angebahnt werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass jedes Veranschaulichungsmittel zunächst Lerngegenstand ist. Deshalb ist eine Beschränkung auf wenige Veranschaulichungsmittel, die vielfach einsetzbar sind geboten.

Folgende Hinweise sollten beim **Arbeiten mit Veranschaulichungen** beachtet werden:

- Durch didaktische Vereinfachung und orientierende Hinweise wird das Wesen hervorgehoben, das inhaltliche Verstehen der Veranschaulichung erleichtert.
- Zur Förderung und auch zur Kontrolle des inhaltlichen Verständnisses werden die Kinder zum Beschreiben und Begründen ihrer Handlungen veranlasst, erhalten sie dazu die entsprechende Anleitung, Hilfe und Zeit.
- Schülertätigkeiten werden in der Phase des Kennenlernens einer neuen Form der Veranschaulichung durch detaillierte Handlungsanweisungen, später durch komplexe Aufträge ausgelöst. Die Entfaltung der Handlung, der bewusste Vollzug einzelner Teilhandlungen wird gesichert, bevor ein schnellerer, verkürzter Vollzug von Teilhandlungen und der Handlung als Ganzes angestrebt wird.
- Neuer Stoff wird stets mit bereits bekannten Veranschaulichungsmitteln erarbeitet.
- Neue Formen und Mittel der Veranschaulichung werden stets an bereits bekannten Sachverhalten eingeführt.

Geistige Aktivität des Kindes im Unterricht ist nur dann möglich, wenn es das jeweils notwendige Ausgangsniveau in Form entsprechender Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten besitzt. Nur wenn sich die Kinder grundlegendes Wissen solide und dauerhaft angeeignet haben und wenn Grundfertigkeiten ausgebildet sind, wird das erforderliche Können im Anwenden erreicht.

Das dementsprechend zu sichernde Repertoire an grundlegenden Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten ist die Voraussetzung zum Lösen neuer Probleme. Im Unterricht sind deshalb gezielt Phasen zu planen, in denen vorrangig an der Sicherung dieses Grundlegenden gearbeitet wird. Über diese Phasen hinaus ist das **Festigen als ein Grundprozess des gesamten Mathematikunterrichtes** anzusehen.

Im Gesamtprozess des Festigens nimmt das **Üben** einen zentralen Platz ein. Dabei ist Üben als ein Prozess zu verstehen, der in erster Linie auf das Ausprägen von Fertigkeiten abzielt, ebenso aber auch auf das Einprägen von Kenntnissen, das Ausbilden von Gewohnheiten und den Erwerb relativ allgemeiner Strategien zur Lösung von Aufgaben gerichtet ist. Wesentlich für den Erfolg des Übens sind die Lernmotivation der Kinder, die Einsicht der Kinder in Ziel und Inhalt der Übung sowie nicht zuletzt eine ausreichende Zeitvorgabe für die Übung, damit alle Kinder in Ruhe üben können.

### 3 Unterrichts begleitende analytische Tätigkeit des Lehrers

Die Analyse des Lernens und seiner Ergebnisse ist im Interesse einer für alle Kinder erfolgreichen und effektiven Gestaltung des Unterrichtes unverzichtbar. Eine derartige Analyse sollte angesichts der Heterogenität der Leistungen der Kinder recht detailliert erfolgen, muss aber zugleich praktikabel sein.

Der nachfolgend vorgestellte, detaillierte und **fortschreibbare Beobachtungsbogen für das einzelne Kind** trägt dem Rechnung.

#### 3.1 Zur Verwendung des Analysebogens

Im beiliegenden Analysebogen wurde das zu erwerbende mathematische Können gewichtet. Im Mittelpunkt steht jenes Können, welches das Fundament für erfolgreiches Weiterlernen im nachfolgenden Unterricht sichert, zur Lösung aktueller Fragestellungen aus der Lebenswirklichkeit der Kinder beiträgt oder die Entwicklung der Persönlichkeit des Kindes in besonderer Weise ermöglicht.

Der Analysebogen ermöglicht die Erfassung von **Lernprozessen und ihren Resultaten in Einheit**. Nicht selten ist die Frage nach dem richtigen Ergebnis gegenüber der Frage nach dem Weg, nach der Art und Weise des Lösens sekundär.

Dazu wird im Analysebogen (für jedes zu analysierende Kind wird ein eigener Bogen geführt) sowohl erfasst, ob das Kind Ergebnisse erreicht, als auch dokumentiert, welche Arbeitsweisen und Lösungswege das Kind dazu nutzt. Das kann im jeweiligen Feld durch Ankreuzen oder auch mit der Angabe des Datums der Beobachtung geschehen. Die Lehrerin hat so zu jedem Zeitpunkt den Überblick, was ein Kind in einem Test gezeigt hat bzw. was sie im Unterricht beim Kind bereits beobachtete.

Der Analysebogen gibt der Lehrerin zugleich eine Rückkopplung zur eigenen Unterrichtsgestaltung: Größere Lücken in den Bögen einzelner Kinder können Anlass sein, auch diese möglicherweise etwas „aus dem Blickfeld geratenen“ Kinder zu beobachten. Analog sollten Stellen, an denen die Bögen aller Kinder auffällige Lücken aufweisen, wo also eine Komponente des Könnens nicht erfasst wurde, zum Nachdenken anregen, ob die betreffenden Inhalte bereits hinreichend thematisiert und ihre Beherrschung durch die Kinder erfasst wurde.

Im Ergebnis einer detaillierten Analyse des Verlaufs der Lerntätigkeit des Kindes kann oft früher, als es sich in entsprechenden Kontrollen als positiv oder negativ abzeichnet, erkannt werden, inwieweit das Lernen langfristig erfolgreich sein wird. Auf der Grundlage der Beobachtungen ist es möglich, sehr früh und damit effektiver Einfluss auf das lernende Kind zu nehmen, etwa fehlerhafte Strategien und Begriffsbildungen zu verhindern bzw. zu korrigieren, sowie bedarfsgerecht und individuell zu fördern. Der Analysebogen dient somit in erster Linie einer differenzierten Unterrichtsgestaltung, ist also für die Hand des Lehrers gedacht.

Das setzt voraus, im tagtäglichen Unterricht planmäßig Situationen zu schaffen und zu nutzen, in denen die Lehrerin Einblick in die Lerntätigkeit der Kinder erhalten kann (beispielsweise wenn Kinder ihre Lösungswege erklären). Bei der Unterrichtsplanung sollte deshalb geprüft werden,

- an welchen Situationen, beim Bearbeiten welcher Aufgaben die Kinder entsprechendes Können unter Beweis stellen können, und eventuell
- welche Kinder hier ihr Können zeigen sollten.

Eine Ergänzung der Beobachtungen liefern die üblichen Lernerfolgskontrollen. Auf der Basis der unterrichtsbegleitenden Beobachtung und der in Tests erbrachten Leistungen sind individuell ausgerichtete Aussagen zum aktuellen Lernstand eines Kindes möglich. Das trägt zur

Optimierung der Unterrichtsgestaltung bei und ermöglicht zugleich zielgerichtete Hinweise an Eltern, Kolleginnen, Horterzieherinnen usw.

## 3.2 Inhalt des Analysebogens

### Abschnitt 1 pränumerische Voraussetzungen

1 Pränumerische Voraussetzungen				
Mengen	Erfassen; Eigenschaften erkennen: Farbe, Form, Größe	[ ]	Bilden nach vorgegebener Eigenschaft: Farbe, Form ,Größe	[ ]
Muster	Erfassen, Eigenschaften erkennen, Beschreiben	[ ]	Fortsetzen	[ ]
Längen	Vergleichen	[ ]	Flächen grob vergleichen	[ ]
Orientierung in der Arbeitsebene	Erfassen	[ ]	Beschreiben [ ]	Anwenden [ ]

Notwendige Voraussetzungen zum Lernen sind **Fähigkeiten und Fertigkeiten**<sup>5</sup> im **Identifizieren, Diskriminieren und Realisieren** beim:

- A Erfassen und Bilden von Mengen (nach Merkmalen wie Form, Farbe, Größe und Anzahl, aber auch Zweck oder Verwendung)
- A Erfassen und Darstellen von Längen und Flächen
- A Erfassen, Bilden, Ergänzen, Fortsetzen von Reihenfolgen und Abläufen
- A Erfassen von Formen und räumlichen Beziehungen / Orientierungen

Dazu **Vergleichen, Unterscheiden und Ordnen die Kinder Objekte** hinsichtlich verschiedener Eigenschaften:

- A Farbe
- A Größe (groß und klein, dick und dünn, lang und kurz, breit und schmal, ...)
- A Form (rund und eckig - dreieckig, viereckig, fünfeckig ..., gerade und krumm, ...)
- A Lage (vorn und hinten, oben und unten, daneben, darunter, darüber, davor , dahinter, ...)
- A Anzahl
- A Längen und Flächen (Größe)
- A Reihenfolgen und Abläufen (Zeit)
- A Formen und räumlichen Beziehungen

Zu beachten ist, dass Farbe und Form absolute Eigenschaften, dagegen groß und klein relative Eigenschaften sind: Der größte Hase ist immer noch kleiner als der kleinste Elefant ... .

Das Erfassen von Mengen sollte sowohl simultan (bis zu 5 Elementen) als auch zählend erfolgen. Das Bilden, Zerlegen und Vereinigen von Mengen sollte mit Mengen bis zu 10 Elementen bereits sicher erfolgen, wobei die jeweilige Anzahl mit den Zahlwörtern beschrieben werden kann. Ebenso werden die Ordnungszahlwörter bis 10 zur Beschreibung von Reihen und Abläufen verwendet.

Hinsichtlich des Erfassens und Fortsetzens von Mustern ist zu prüfen, inwieweit die Kinder vom Unwesentlichen abstrahieren, die relevanten Merkmale des Musters in den Mittelpunkt stellen und es fortsetzen können. Material zur Analyse bieten die Muster im Arbeitsheft.

<sup>5</sup> Analyseschwerpunkte sind in den Aufzählungen jeweils mit einem A hervorgehoben

Die Kinder können Gegenstände nach ihrer Länge vergleichen. Messen zum Zwecke des Vergleichs bei Tätigkeiten wie Basteln, Bauen oder ähnlichem sollte ihnen vertraut sein. Daneben sollen die Kinder über Erfahrungen im Schätzen von Längen verfügen und Längenunterschiede erfassen und durch die jeweilige Steigerungsform beschreiben: lang, länger, am längsten.

Die Kinder sollen die Eigenschaften und die Anordnung von Objekten im Raum und in der Arbeitsebene charakterisieren.

## Abschnitt 2 - Geometrie

Die Beschäftigung mit geeigneten geometrischen Inhalten fördert die Entwicklung der im Abschnitt 1 genannten Fähigkeiten. Auch deshalb ist hier ein systematisches Arbeiten von Klasse 1 an erforderlich. Schwerpunkte sind dabei:

- **Identifizieren** (Erfassen, Erkennen, Beschreiben) und **Realisieren** (Skizzieren, Zeichnen, Herstellen) von Objekten und räumlichen (Lage)Beziehungen
- **Vergleichen von Formen und räumlichen Beziehungen** in der Realität wie in schematischen Darstellungen
- **Gedankliches Bewegen und Verändern von geometrischen Objekten** (Umordnen von Bauwerken, Zerlegen und Zusammensetzen von Figuren, Spiegeln)

Im Geometrieunterricht sind Tätigkeiten wie Bauen, Legen, Zerlegen, Zusammensetzen, Falten, Schneiden, Zeichnen und Skizzieren unverzichtbar. Jedoch die Handlung allein, das Handtieren mit und das Herstellen von Dingen (etwa Skizzieren, Zeichnen, Falten, Schneiden, Bauen, Legen) ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend für den Lernerfolg. Der mit einer **äußeren Handlung** erreichbare Lerneffekt tritt prinzipiell erst dann ein, wenn die Kinder durch die Handlung zu einer auf den Aneignungsgegenstand gerichteten geistigen Tätigkeit veranlasst werden.

Die Richtung der geistigen Tätigkeit auf den Aneignungsgegenstand und die Konzentration auf diesen erfordert es, dass die Kinder Arbeitstechniken als sicher verfügbaren Routinen auf Fertigniveau beherrschen. Erst dann, wenn die Handlungsausführung nicht mehr die volle Aufmerksamkeit des Kindes beansprucht, hat es Zeit, über die Tätigkeit nachzudenken. Arbeitstechniken wie das Bauen mit Würfeln, das Falten von Papier, das Schneiden auf einem Riss, das Messen, das Zeichnen und das Skizzieren sollten deshalb von Klasse 1 an im handwerklichen-praktischen Sinne planmäßig entwickelt und systematisch perfektioniert werden.

### Abschnitt 2.1 – Geometrische Begriffe

2.1 Begriffe	Identifizieren		Realisieren		
	Erkennen	Beschreiben	Skizzieren	Zeichnen <sup>6</sup>	Herstellen <sup>7</sup>
Punkt, Linie, gerade Linie	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
Dreieck	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
Viereck	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
Kreis	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
Spiegelachse	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
Muster	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
Kugel	[ ]	[ ]	-	-	[ ]
Würfel,	[ ]	[ ]	-	-	[ ]

Die oben genanntengeometrischen Begriffe sind Abstraktionen unserer Lebenswelt und gehören bei vielen Kindern – wenn auch sehr unterschiedlich ausgeprägt – zu den vorschulischen Erfahrungen. Sie werden zunächst prototypisch bestimmt und genutzt, später dann vertieft.

<sup>6</sup> Mit und ohne Hilfsmittel wie Schablone, Lineal und Dreieck

<sup>7</sup> Schneiden, Falten, Bauen, Legen, Kneten, ...

Die Festigung der Begriffe erfolgt durch **Identifizieren** (Erkennen von Repräsentanten des Begriffes), **Realisieren** (Herstellen von Repräsentanten des Begriffes) sowie das **Einordnen von Begriffen in ein** (vorhandenes oder erst zu erstellendes) **Begriffssystem**. Dabei spielen äußere Handlungen eine wesentliche Rolle.

### Falten

Das Falten als eine Tätigkeit im Geometrieunterricht verbindet räumliches Handeln – das Umklappen des Papiers – mit dem Vorstellen von räumlichen Prozessen und räumlichen und ebenen Objekten:

A Wie muss gefaltet werden, damit ein bestimmtes Muster entsteht?

A Wo verlaufen die Faltlinien bei einer Mehrfachfaltung nach dem Aufklappen des Papiers?

Das Falten kann zugleich – je nach Aufgabenstellung – zur Begriffsidentifizierung (Wo erkennst du nach dem Falten rechte Winkel?) bzw. zur Begriffsrealisierung (etwa: Falte aus einem Blatt mit ringsherum abgerissenen Rand ein Rechteck) verwendet werden.

Um die in der Regel motivierende Wirkung des Faltens über längere Zeit aufrecht zu erhalten, bedarf es der systematischen Entwicklung von Grundfertigkeiten, welche insbesondere bei komplexeren Anforderungen den Erfolg erst ermöglichen. Ebenso benötigen die Kinder grundlegende Gewohnheiten, beginnend mit dem Umgang mit Papier bis hin zur Nutzung von Kontrollmethoden und -kriterien beim Beurteilen der eigenen Faltung.

Beim Herstellen von Faltfiguren können die Kinder in der Tätigkeit rasch erleben, dass es zweckmäßig und nützlich ist, sauber und exakt zu arbeiten.

In **Klasse 1** sollten die Kinder **folgendes Können** im handwerklich-praktischen Sinne erwerben:

A Falten gerader Linien (Bruch und Gegenbruch oder Berg- und Talfalten)

A Faltungen nach sprachlichen und bildlichen Anweisungen ausführen

### Zeichnen

Geometrische Objekte können zeichnerisch dargestellt werden. In den Klassen 1 bis 4 steht **Skizzieren** als hilfsmittelfreies Darstellen von geometrischen Objekten (Freihandzeichnen) und **Zeichnen** als das Darstellen geometrischer Objekte unter Nutzung von Zeichengeräten wie Lineal, Geoschablone, Zirkel, usw. im Mittelpunkt.

Der handwerklich-praktische Aspekt des Zeichnens bezieht sich auf die praktische Ausführung und umfasst Fragen der

- angemessenen Nutzung der Zeichengeräte
- Genauigkeit
- Übersichtlichkeit
- Sauberkeit

Haben Kinder Zeichenfertigkeiten erworben, besitzen sie ein Mittel, sich nonverbal auszudrücken. Kinder mit Defiziten im sprachlichen Können eröffnet sich damit eine weitere Ausdrucksmöglichkeit, was letztlich diesen Kindern Erfolgserlebnisse erleichtert.

Beim Herstellen vieler Skizzen/ Zeichnungen können Kinder in der Tätigkeit erleben, dass es zweckmäßig und den Erfolg begünstigend ist, wenn sauber und exakt skizziert oder gezeichnet wird. Dabei wird der Sinn für Schönheit, Ordnung und Sauberkeit angesprochen. Diese Notwendigkeiten entdeckt das Kind aus der Sache heraus, ohne äußere Appelle an Ordnung usw.

Der **gedanklich-theoretische Aspekt** des Zeichnens bezieht sich auf

- Fragen der Rechtfertigung einer Skizze/Zeichnung, eines Zeichenweges (warum gerade so bzw. gerade in dieser Reihenfolge skizziert/gezeichnet?).
- Fragen der Realisierbarkeit sowie der Existenz und der Anzahl von Lösungen einer Zeichenaufgabe.

Hierbei ist das Skizzieren/Zeichnen ein Mittel zum Erkenntnisgewinn, zum Auffinden gesetzmäßiger Zusammenhänge usw. Es besitzt damit eine heuristische Funktion. Skizzen bzw. Zeichnungen können

- helfen, die Wahrheit einer Aussage zu erkennen. Kinder können beispielsweise ausprobieren, ob so es ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln geben kann, indem sie es zu zeichnen versuchen.
- Begriffe verdeutlichen. Wer die Begriffsbestimmung eines geometrischen Begriffes vornimmt und vorher niemals einen Repräsentanten dieses Begriffes bewusst wahrgenommen hat, kann einen Repräsentanten zeichnen (Begriffsrealisierung).
- gut Spezialfälle von Begriffe veranschaulichen: Was sind rechteckige Rhomben?

Generell begünstigt das Skizzieren/Zeichnen als praktisch-gegenständliche Tätigkeit den Erkenntnisgewinn, weil es das für den intellektuellen Fortschritt so wichtige Zusammenspiel von Handeln, Denken und Sprechen fördert. Können im Skizzieren zu entwickeln ist allein schon deshalb sinnvoll, weil eine Skizze der Schnelligkeit des Denkens viel besser zu folgen vermag als eine Zeichnung unter Nutzung von Hilfsmitteln. Außerdem ist es bei vielen Aufgaben nicht notwendig, eine exakte, eventuell gar maßstäbliche Zeichnung anzufertigen, sondern es kommt lediglich darauf an, wesentliche Seiten des Sachverhalts mit angemessener Genauigkeit wiederzugeben. Skizzieren wie Zeichnen sind damit mehr als das getreuliche Abbilden eines Sachverhalts, sondern immer auch als ein von Analyse und Abstraktion begleitete Prozesse anzusehen.

In Klasse 1 sollten die Kinder folgendes Können im Zeichnen erwerben:

- A Fähigkeit zur Rechts-Links-Orientierung: Bewegen und Beschreiben, Zeichnen im Raster, gedankliches Orientieren
- A Sachgerechte Handhabung von Zeichengeräten (Stifte, Lineal, Geoschablone)
- A Verbinden von Punkten mit und ohne Lineal
- A Zeichnen von Linien, darunter auch Geraden sowie ebenen Figuren

### Abschnitte 2.2 bis 2.5 Räumlich-visuelle Qualifikation

2.2. Räumliche Orientierung (vor - hinter - links - rechts) Lage von Objekten			
Beschreiben		nach verbaler und zeichnerischer Vorgabe handelnd erstellen	
2.3. Räumliche Anordnungen von Objekten			
Erfassen und Beschreiben		Erstellen	
einer realen Anordnung aus der eigenen Position	[ ]	nach bildlicher Vorgabe aus der eigenen Position gesehen real anordnen	[ ]
einer realen Anordnung aus der Position eines anderen, insbesondere gegenüber sitzenden Beobachters	[ ]	nach verbaler Vorgabe aus der eigenen Position gesehen real anordnen	[ ]
2.4. Vorstellung ebener Sachverhalte			
Gedankliches Zusammensetzen ebener Figuren zu anderen Figuren / zu Mustern	[ ]	Gedankliches Zerlegen ebener Figuren in eine bestimmte Art bzw. eine bestimmte Anzahl von Teilfiguren [ ]	[ ]
Gedankliches Verschieben, Drehen und Spiegeln ebener Figuren			[ ]
2.5. Räumliches Denken als gedankliches			
Verändern der Lage von Objekten	[ ]	Verändern der Form von Objekten	[ ]

Die **Orientierung im Raum** gehört zur Vorerfahrung der Kinder, da sie sich auf den Lebensraum bezieht. Hier ist es erforderlich, den Kindern immer wieder die Gelegenheit zur bewussten Wahrnehmung und Beschreibung zu geben: Wegbeschreibungen vom Klassenzimmer auf den Pausenhof usw. Die Kinder sollen sich auch darüber austauschen, wie sich die räumlichen Anordnungen und Beziehungen für das sich bewegende Kind ändern.

Beim Betrachten **räumlicher Anordnungen** (etwa einer aus Bauklötzern gebauten Stadt) sollte eine Beschreibung **räumlicher Beziehungen** erfolgen (vorn, hinten, oben, unten, links, rechts, links von, rechts von, über, unter, davor, dahinter, zwischen, ...).

- A Was steht links von Objekt A?
- A Stelle Objekt A neben Objekt B, aber vor Objekt C.
- A Beschreibe, wie dein (gegenüber sitzender) Partner die Stadt sieht. Was sieht er rechts, was rechts vom Turm ... Dein Partner prüft, ob du richtig beschreibst.

Von besonderer Bedeutung ist diese Auseinandersetzung mit Beschreibungen aus unterschiedlichen Perspektiven. Entwicklungsbedingt werden das in der 1. Klasse noch nicht alle Kinder erreichen, sondern längere Zeit noch vielfältige Übung benötigen.

Beim **Vorstellen ebener Sachverhalte** gilt es

- A gegebene (ebene) Muster zu erfassen und fortzusetzen oder zu ergänzen, sowie
- A Muster aus gegebenen geometrischen Figuren durch Legen oder Zeichnen (mit der Schablone) herzustellen.

Dies dient sowohl der Entwicklung von Feinmotorik und Zeichenfertigkeiten also auch dem gedankliche Bewegen der Figuren. Die Frage, ob und wie eine Figur in ein Muster passt, erfordert das Vorstellen von Verschiebung, Drehung und Spiegelung. Einfache Puzzles und Legespiele bieten dazu vielfältiges Übungsmaterial.

Die **Vorstellung räumlicher Sachverhalte** kann an Orientierungsübungen in einer einfach strukturierten Stadt (fiktiv oder real) gekoppelt werden.

- A So können Wege und Lagebeziehungen an Hand eines (2D) Stadtplans erfasst werden. Gespräche über die verschiedenen Sichtweisen sind dabei notwendig.

Die Kinder erwerben Fähigkeiten zum **räumlichen Denken**, mit denen sie folgender Fragen bzw. Aufgaben bearbeiten können:

- A Wie sieht ein betrachtetes Objekt von der anderen Seite aus?
- A Was sieht man, wenn man auf die Seite (Ecke, Kante) eines Würfels schaut?
- A Welchen Schatten wird ein Gegenstand werfen? Wie wird sich dieser verändern, wenn man den Gegenstand z.B. kippt oder dreht?
- A Wie kann ein (Würfel)Bauwerk umgebaut werden bzw. (ohne die Anzahl der verwendeten Würfel bzw. Bausteine zu bestimmen!) kann ein (Würfel)Bauwerk so umgebaut werden, dass daraus ein anderes vorgegebenes (Würfel-)Bauwerk entsteht.

### Abschnitt 3 – Arithmetik

Die Kinder entwickeln ihre **Zählkompetenz** weiter und erwerben **Zahlensinn**. Können im Rechnen basiert auf einem gut ausgebildeten Zahlverständnis, d.h. auf der Fähigkeit Zahlen zu erfassen, in Relation zu anderen Zahlen zu sehen, zu bilden, darzustellen und zu verwenden. Von besonderer Bedeutung ist dabei die Repräsentation der Zahlen als Anzahl (mittels Mengen) und Maßzahl (darunter insbesondere mittels Längen – nicht zuletzt mit Blick auf den Zahlenstrahl – und mittels Flächen).

Von Anfang an ist es wichtig, dass die Kinder auf der Basis konkreter Handlungen vielfältige Beziehungen zwischen den Zahlen herzustellen und den Zahlenraum mit seiner Struktur zu erfassen, weil die Zahlen erst durch ihre Beziehungen zueinander ihre Bedeutung erlangen.

3.1 Zahlbegriff im Zahlraum bis 20 und Vielfache von 10						
	Erfassen			Darstellen		
Kardinalzahl	simultan [ ]	zählend [ ]	Strukturierend [ ]	simultan [ ]	zählend [ ]	Strukturiert [ ]
Maßzahl	als Länge [ ]	als Fläche [ ]	als Volumen [ ]	als Länge [ ]	als Fläche [ ]	als Volumen [ ]
Ordinalzahl	des Platzes eines Objektes in einer Folge [ ]			Einem Objekt einen Platz in einer Reihenfolge zuweisen [ ]		
3.2 Zählfähigkeit						
Vorwärts- und Rückwärtszählen			[ ]	Schrittweises Zählen		[ ]
3.3 Zahlbeziehungen erkennen und nutzen						
3.3.1	Zahlen vergleichen					
über die Kardinalzahl (Anzahl)	simultan [ ]		zählend [ ]		strukturierend [ ]	
über die Maßzahl mittels	Länge [ ]		Fläche [ ]		Volumen [ ]	
über die Ordinalzahl mittels	Zahlwortreihe [ ]		Zahlenstrahl [ ]			
3.3.2 Eigenschaften von Zahlen erfassen, darstellen und nutzen						
gerade und ungerade Zahlen		[ ]	an Mengenanordnungen		[ ]	am Zahlenstrahl [ ]

Zahlen werden zunächst als Kardinalzahlen erarbeitet. Entsprechend werden Zahlen, Zahlzerlegungen, Zahlbeziehungen und die arithmetischen Operationen in der Grundschule veranschaulicht. Später geht es um

A das simultane Erfassen von Anzahlen an unstrukturierten und strukturierten Mengen (Bilder, Muster u.a.).

A um das Ab- oder Auszählen von Anzahlen, auch in größeren Schritten.

Zahlen müssen mit Blick auf das Weiterführende in Beziehung zu anderen Zahlen gedacht werden: 6 ist das Doppelte von 3, die Hälfte von 12, etwas mehr als die Hälfte von 10...,

Kinder brauchen zum Verstehen der Zahl als Maßzahl Erfahrungen im

A Messen von Längen und Flächen (Abgreifen, Abschreiten, Auslegen, Ausfüllen u.v.a.m.)

A Erfassen und im Herstellen von Zahlbeziehungen (Nachbarschaften, Vergleichen, Verdoppeln, Halbieren).

Im diesem Sinne wird der **Zahlenstrahl** von Klasse 1 an genutzt, wird er immer wieder neu konstruiert. Der Zahlenstrahl kann als eine Abstraktion von einer Würfelstange gewonnen werden. Beim Betrachten von Würfelstangen mit verschiedenen großen Würfeln wird deutlich, dass die Beziehungen zwischen zwei Zahlen von der Größe der Einheit unabhängig sind. So ist beispielsweise die 4 immer die Mitte zwischen der 0 und der 8 ... ..

Die Fähigkeiten

A am Zahlenstrahl Zahlen zu identifizieren und darzustellen sowie

A den Zahlenstrahl flexibel mit verschiedenen großen Einheiten neu zu konstruieren

sind bedeutsam weit über die Klasse 1 und die Grundschulzeit hinaus. Weitere Zahlen, insbesondere auch gebrochene Zahlen können dort verortet werden, der Zahlenstrahl ist zur Zahlengerade erweiterbar ... .

Die Kinder gewinnen beim Arbeiten mit dem Zahlenstrahl Einsichten:

A Zahlen und Zahlbeziehungen sind unabhängig von der Größe und Art der Maße,

A größere Zahlen stehen weiter rechts bzw. ,

A das Doppelte einer Zahl ist doppelt so weit von der Null entfernt wie die Zahl selbst.

3.4 Rechnen			
3.4.1 Operationsvorstellung	Mit Hilfe von Mengen		am Zahlenstrahl
	dynamisch (zeitlich-sukzessiv)	statisch (räumlich-simultan)	
Addieren	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Subtrahieren	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Verdoppeln	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Halbieren	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Multiplizieren (Mini 1x1)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3.4.2 Rechenstrategien kennen und nutzen			
	Addieren (Bsp.)	Subtrahieren (Bsp.)	
„Zehnerergänzung“	$(7 + 9 = 7 + 3 + 6)$ <input type="checkbox"/>	$(16 - 9 = 16 - 6 - 3)$ <input type="checkbox"/>	
„vor-zurück“ („zurück-vor“)	$(7 + 9 = 7 + 10 - 1)$ <input type="checkbox"/>	$16 - 9 = 16 - 10 + 1$ <input type="checkbox"/>	
„Verändern“ (Kraft der Mitte, gegensinnig/gleichsinnig)	<i>(Kraft der Mitte: <math>7 + 9 = 8 + 8</math>, gegensinnig: <math>7 + 9 = 6 + 10</math>)</i> <input type="checkbox"/>	<i>gleichsinnig: <math>(16 - 9 = 17 - 10)</math></i> <input type="checkbox"/>	
„Ergänzen“	-----	$16 - 9 \Rightarrow 9 + \_ = 16$ <input type="checkbox"/>	
„Verdoppelungen nutzen“	$(7 + 9 = 7 + 7 + 2)$ <input type="checkbox"/>		
3.4.3 Grundaufgaben: Addieren, Subtrahieren, Verdoppeln, Halbieren			
Lösen können (30 Aufgaben / 10 min / 0 Fehler <sup>8</sup> )			<input type="checkbox"/>
Automatisierte Beherrschung (30 Aufgaben / 5 min / 0 Fehler)			<input type="checkbox"/>
3.4.4 Können im mündlichen Rechnen			
Nacheinanderausführung von Teilschritten ( $S_n$ )			
Übertragen bekannter Aufgaben ( $S_{ii}$ )			

Ausgehend von Handlungen erwerben die Kinder **Operationsvorstellungen**:

Die Kinder betrachten Sachverhalte und stellen sich diese statisch (räumlich-simultan) vor. Sie beobachten Prozesse und stellen sich diese dynamisch (zeitlich-sukzessiv) vor.

Sowohl Objekte (bzw. Objektgruppierungen) als auch Prozesse dienen als Repräsentanten von Rechenoperationen. Die Kinder erfassen, welche Sachverhalte mit welchen Termen beschrieben werden können. Dabei erfassen sie zugleich, dass die Zuordnung von Sachverhalt (Objekt, Prozess) und Term nicht eindeutig ist.

Abbildungen, die ja statisch sind, können stets verschieden interpretiert werden: Sind beispielsweise 4 Vögel auf einer Telegrafeneileitung sitzend und 3 andere Vögel in der Luft abgebildet, sind folgende Interpretationen möglich

- Von 7 Vögeln auf der Telegrafeneileitung fliegen 3 weg.  $(7 - 3)$
- Von 7 Vögeln sitzen 4 auf der Telegrafeneileitung.  $(7 - 4)$
- Zu 4 Vögeln auf der Leitung kommen jetzt noch 3 andere dazu.  $(4 + 3)$
- Es sind 3 Vögel in der Luft und 4 auf der Telegrafeneileitung.  $(3 + 4)$

Inwieweit die Kinder **Operationsvorstellungen** besitzen, wird daran deutlich,

**A** wie flexibel sie Handlungen (enaktiv), Abbildungen (ikonisch) verbale Darstellungen von Sachverhalten (verbal-symbolisch) und Terme (nonverbal-symbolisch) paarweise einander zuordnen können.

**A** Inwieweit sie diese Zuordnungen beschreiben und begründen können

Hierbei ist die Fähigkeit zum Übergang von jeder der Ebenen nach Bruner zu jeder anderen Ebene (in beiden Richtungen) wesentlich.

<sup>8</sup> 1 Fehler führt dazu, dass zur benötigten Zeit 20 Sekunden addiert werden.

Auf der Grundlage des inhaltlichen Verständnisses der Operationen lernen die Kinder **Rechenstrategien** kennen und nutzen. Hier sollte erfasst werden,

- A inwieweit die Kinder die Strategien inhaltlich erfasst haben, also beispielsweise mit Material darstellen können, *wie* hier gerechnet wird und *warum* man so rechnen kann.
- A inwieweit die Kinder eine Strategie dann nutzen, wenn sie für die jeweiligen Aufgaben brauchbar sind,

Die klassenöffentliche Vorstellung und Wertung von Lösungswegen durch die Kinder bietet dem Lehrer die Möglichkeit zur unterrichtsbegleitenden Analyse. Es kann an dieser Stelle allerdings nicht erwartet werden, dass alle Kinder jede Strategie nutzen.

Solides Können im Rechnen schließt die **automatisierte Beherrschung der Grundaufgaben**<sup>9</sup> ein. Hier kann zwischen einer Reproduktion gedächtnismäßig eingprägten Materials und der automatisierten Ausführung der Rechnung nicht unterschieden werden. In der Praxis ist es oft so, dass sich die Kinder eine Vielzahl von Grundaufgabengleichungen eingpräggt haben, während sie bei anderen Aufgaben sehr schnell rechnen.

- A Auf der Grundlage eines entwickelten Operationsverständnisses sollten die Kinder am Ende der ersten Klasse 30 in Termform gegebene Grundaufgaben in maximal 10 Minuten fehlerfrei lösen.
- A Benötigt ein Kind maximal 5 Minuten, kann auf automatisiertes Beherrschen der Grundaufgaben geschlossen werden.

Nicht zuletzt ist es notwendig, das erworbene Können im Lösen von Aufgaben, insbesondere der Grundaufgaben, auf neue Aufgaben zu übertragen. Aufgaben wie  $14 + 3$ ,  $17 - 3$ ,  $40 + 30$  oder  $70 - 40$  können auf diese Weise gelöst werden. Bewährte Formen des Lösens wie beispielsweise das Zerlegen eines Summanden werden an neuen Aufgaben erprobt. So können Aufgaben wie  $17 + 8$  gelöst werden.

#### Abschnitt 4 – Größen

Viele Dinge, die unser Alltagshandeln bestimmen, lassen sich durch Größen beschreiben, d.h. einige ihrer qualitativen Eigenschaften lassen sich quantifizieren, quantitativ vergleichen, schätzen und messen. Die Kinder erweitern in Klasse 1 ihre vorschulischen Erfahrungen zum realen oder gedanklichen Vergleichen von Objekten hinsichtlich der Eigenschaften Länge, Fläche, Volumen.

Hierbei ist zu erfassen,

- A inwieweit die Kinder Methoden des unmittelbaren Vergleiches bzw. des mittelbaren Vergleiches (ein „Mittler“ wird erst an das eine, dann an das andere Objekt angelegt) beherrschen,
- A inwieweit sie über realistische Größenvorstellungen (Festwerte) verfügen

Länge	Unmittelbarer Vergleich	[ ]	Vergleichen mit einem Mittler	[ ]
	Messen	[ ]	Schätzen	[ ]
	Realistische Größenvorstellungen			[ ]
Flächen	Unmittelbarer Vergleich	[ ]	Vergleichen mit einem Mittler	[ ]
	Messen	[ ]	Schätzen	[ ]
Zeit	Zeitpunkte im Tageslauf kennen	[ ]	Zeitauern als Festwert kennen	[ ]
	Zeitpunkt erfassen	[ ]	Zeitpunkt einstellen	[ ]
	Zeitdauer erfassen	[ ]	Zeitdauer darstellen	[ ]
Währungen	Geldbeträge erfassen	[ ]	Geldbeträge darstellen	[ ]

<sup>9</sup> Als Grundaufgaben der Addition werden hier alle Aufgaben mit zwei einstelligen Summanden bezeichnet. Grundaufgaben der Subtraktion sind jene Aufgaben, deren Umkehraufgaben Grundaufgaben der Addition sind.

Das **Messen** mit nichtnormierten und normierten Einheiten soll mit der Entwicklung von Fähigkeiten im **Schätzen** (ein Denken in Relationen wie z.B. ... ist dreimal so lang wie ... ) und von Größenvorstellungen einhergehen. Die **Entwicklung realistischer Größenvorstellungen** erfordert die Kenntnis geeigneter Festwerten.

Hinsichtlich der **Uhrzeiten** sollen die Kinder zunächst subjektiv bedeutsame Zeitpunkte im Tagesablauf verorten können sowie die Zeitdauern ausgewählter Ereignisse im Sinne von Festwerten kennen.

Hinsichtlich der Arbeit im Größenbereich **Währungen** kommt es zum einen auf das Erfassen und Darstellen von Geldbeträgen unter Beachtung der verschiedenen Stückelungen an. Zum anderen geht es mit lebenspraktischem Bezug auch um den Erwerb von Kenntnissen über Preise von Waren des täglichen Bedarfes.

### Abschnitt 5 – Problemlösen

Die Kinder sollen von Klasse 1 an in der Begegnung mit vielfältigen Beispielen erfahren, dass es in der Welt viele Geschichten gibt, von denen eine ganze Reihe Geschichten mit Zahlen sind. Zugleich sollen sie erfahren, dass nur zu einigen der Geschichten mit Zahlen etwas Sinnvolles gerechnet werden kann und dass selbst das nicht immer notwendig ist.

Ein erster Schritt zur Lösung eines Problems ist stets das Erfassen des Problems und seine Beschreibung. Deshalb sollen es die Kinder in der Auseinandersetzung mit vielfältigen Problemen (darunter auch „Kapitänsaufgaben“) lernen, Probleme zu erkennen und möglichst treffend zu formulieren. Dabei ist eine mathematische Formulierung wünschenswert, aber nicht in jedem Fall notwendig..

5. Problemlösen			
Sachverhalte mit eigenen Worten wiedergeben			[ ]
systematisches Probieren	[ ]	Skizzieren des Sachverhalts	[ ]
auf bekannte Probleme zurückführen	[ ]	Arbeit mit Tabellen	[ ]
Anlegen und Lesen von Strichlisten	[ ]	Anlegen und Lesen von Diagrammen	[ ]
Ergebnisse an den eigenen Erfahrungen prüfen			[ ]

Es ist oft hilfreich, Probleme mit Skizzen zu veranschaulichen. Ebenso sollten es die Kinder lernen, Probleme zu erweitern, einzuengen, zu verändern, Fragen zu stellen, Vermutungen zu äußern und diese Vermutungen zu überprüfen.

Das Anlegen und Lesen von Strichlisten, Tabellen, Diagrammen und Skizzen hilft den Kindern, Probleme zunehmend mathematisch zu beschreiben.

Auf diese Weise werden Strategien zum Lösen von Problemen entwickelt, erkennen die Kinder den Nutzen eines planmäßigen Vorgehens, des systematischen Probierens und des Zurückführens neuer auf bereits gelöste Probleme.

Bereits an dieser Stelle sollte es zur Gewohnheit werden, gefundene Ergebnisse an eigenen Erfahrungen zum Sachverhalt zu prüfen. Im Anschluss an die Lösung eines Problems ist jene Phase der Rückbesinnung, in der sowohl die Lösung als auch der Lösungsweg betrachtet unverzichtbar und sollte den Kindern zur Gewohnheit werden. Das Herausarbeiten von Methoden des Problemlösens versetzt die Kinder langfristig in die Lage, Probleme bewusster anzugehen und dadurch besser zu lösen.

Nachfolgend ist der Beobachtungsbogen noch einmal zusammenhängend dargestellt:

### 3.3 Individueller Beobachtungsbogen für Klasse 1

1. Pränumerische Voraussetzungen						
Mengen	Erfassen; Eigenschaften erkennen: Farbe, Form, Größe		[ ]	Bilden nach vorgegebener Eigenschaft: Farbe, Form, Größe		[ ]
Muster	Erfassen, Eigenschaften erkennen, Beschreiben		[ ]	Fortsetzen		[ ]
Längen	Vergleichen		[ ]	Flächen	grob vergleichen	
Orientierung in der Arbeitsebene	Erfassen	[ ]	Beschreiben	[ ]	Anwenden	[ ]
2. Geometrie						
2.1 Begriffe	Identifizieren			Realisieren		
	Erkennen	Beschreiben	Skizzieren	Zeichnen <sup>10</sup>	Herstellen <sup>11</sup>	
Punkt, Linie, gerade Linie	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	
Dreieck	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	
Viereck	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	
Kreis	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	
Spiegelachse	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	
Muster	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	
Kugel	[ ]	[ ]	-	-	[ ]	
Würfel,	[ ]	[ ]	-	-	[ ]	
2.2. Räumliche Orientierung (vor - hinter - links - rechts) Lage von Objekten						
Beschreiben			[ ]	nach verbaler und zeichnerischer Vorgabe handelnd erstellen		[ ]
2.3. Räumliche Anordnungen von Objekten						
Erfassen und Beschreiben			Erstellen			
einer realen Anordnung aus der eigenen Position			[ ]	nach bildlicher Vorgabe aus der eigenen Position gesehen real anordnen		[ ]
einer realen Anordnung aus der Position eines anderen, insbesondere gegenüber sitzenden Beobachters			[ ]	nach verbaler Vorgabe aus der eigenen Position gesehen real anordnen		[ ]
2.4. Vorstellung ebener Sachverhalte						
Gedankliches Zusammensetzen ebener Figuren zu anderen Figuren / zu Mustern			[ ]	Gedankliches Zerlegen ebener Figuren in eine bestimmte Art bzw. eine bestimmte Anzahl von Teilfiguren [ ]		[ ]
Gedankliches Verschieben, Drehen und Spiegeln ebener Figuren						[ ]
2.5. Räumliches Denken als gedankliches						
Verändern der Lage von Objekten			[ ]	Verändern der Form von Objekten		[ ]
3. Arithmetik						
3.1 Zahlbegriff im Zahlraum bis 20 und Vielfache von 10						
	Erfassen			Darstellen		
Kardinalzahl	simultan	Zählend	strukturierend	simultan	zählend	strukturiert
	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
Maßzahl	als Länge	als Fläche	als Volumen	als Länge	als Fläche	als Volumen
	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
Ordinalzahl	des Platzes eines Objektes in einer Folge		[ ]	einem Objekt einen Platz in einer Reihenfolge zuweisen		[ ]

<sup>10</sup> Mit und ohne Hilfsmittel wie Schablone, Lineal und Dreieck

<sup>11</sup> Schneiden, Falten, Bauen, Legen, Kneten, ...

<b>3.2 Zählfähigkeit</b>						
Vorwärts- und Rückwärtszählen	<input type="checkbox"/>	Schrittweises Zählen	<input type="checkbox"/>			
<b>3.3 Zahlbeziehungen erkennen und nutzen</b>						
<b>3.3.1 Zahlen vergleichen</b>						
über die Kardinalzahl (Anzahl)	simultan	<input type="checkbox"/>	zählend	<input type="checkbox"/>	strukturierend	<input type="checkbox"/>
über die Maßzahl mittels	Länge	<input type="checkbox"/>	Fläche	<input type="checkbox"/>	Volumen	<input type="checkbox"/>
über die Ordinalzahl mittels	Zahlwortreihe	<input type="checkbox"/>	Zahlenstrahl	<input type="checkbox"/>		
<b>3.3.2 Eigenschaften von Zahlen erfassen, darstellen und nutzen</b>						
gerade und ungerade Zahlen	<input type="checkbox"/>	an Mengenanordnungen	<input type="checkbox"/>	am Zahlenstrahl	<input type="checkbox"/>	
<b>3.4 Rechnen</b>						
<b>3.4.1 Operationsvorstellung</b>		<b>Mit Hilfe von Mengen</b>			<b>am Zahlenstrahl</b>	
		dynamisch (zeitlich-sukzessiv)	statisch (räumlich-simultan)			
Addieren		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
Subtrahieren		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
Verdoppeln		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
Halbieren		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
Multiplizieren (Mini 1x1)		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
<b>3.4.2 Rechenstrategien kennen und nutzen</b>						
	Addieren (Bsp.)		Subtrahieren (Bsp.)			
„Zehnerergänzung“	$7 + 9 = 7 + 3 + 6$	<input type="checkbox"/>	$16 - 9 = 16 - 6 - 3$	<input type="checkbox"/>		
„vor-zurück“ („zurück-vor“)	$7 + 9 = 7 + 10 - 1$	<input type="checkbox"/>	$16 - 9 = 16 - 10 + 1$	<input type="checkbox"/>		
„Verändern“ (Kraft der Mitte, gegenseinnig/gleichsinnig)	$7 + 9 = 8 + 8,$ $7 + 9 = 6 + 10$	<input type="checkbox"/>	$16 - 9 = 17 - 10$	<input type="checkbox"/>		
„Ergänzen“			$16 - 9 \Rightarrow 9 + \_ = 16$	<input type="checkbox"/>		
„Verdoppelungen nutzen“	$(7 + 9 = 7 + 7 + 2)$	<input type="checkbox"/>				
<b>3.4.3 Grundaufgaben: Addieren, Subtrahieren, Verdoppeln, Halbieren</b>						
Lösen können (30 Aufgaben / 10 min / 0 Fehler <sup>12</sup> )						<input type="checkbox"/>
Automatisierte Beherrschung (30 Aufgaben / 5 min / 0 Fehler)						<input type="checkbox"/>
<b>3.4.4 Können im mündlichen Rechnen</b>						
Nacheinanderausführung von Teilschritten (S <sub>n</sub> )						<input type="checkbox"/>
Übertragen bekannter Aufgaben (S <sub>ü</sub> )						<input type="checkbox"/>
<b>4. Größen</b>						
Länge	Unmittelbarer Vergleich	<input type="checkbox"/>	Vergleichen mit einem Mittler	<input type="checkbox"/>		
	Messen	<input type="checkbox"/>	Schätzen	<input type="checkbox"/>		
	Realistische Größenvorstellungen			<input type="checkbox"/>		
Flächen	Unmittelbarer Vergleich	<input type="checkbox"/>	Vergleichen mit einem Mittler	<input type="checkbox"/>		
	Messen	<input type="checkbox"/>	Schätzen	<input type="checkbox"/>		
Zeit	Zeitpunkte im Tageslauf kennen	<input type="checkbox"/>	Zeitdauern als Festwert kennen	<input type="checkbox"/>		
	Zeitpunkt erfassen	<input type="checkbox"/>	Zeitpunkt einstellen	<input type="checkbox"/>		
	Zeitdauer erfassen	<input type="checkbox"/>	Zeitdauer darstellen	<input type="checkbox"/>		
Währungen	Geldbeträge erfassen	<input type="checkbox"/>	Geldbeträge darstellen	<input type="checkbox"/>		
<b>5 Problemlösen</b>						
Sachverhalte mit eigenen Worten wiedergeben					<input type="checkbox"/>	
systematisches Probieren	<input type="checkbox"/>	Skizzieren des Sachverhalts			<input type="checkbox"/>	
auf bekannte Probleme zurückführen	<input type="checkbox"/>	Arbeit mit Tabellen			<input type="checkbox"/>	
Anlegen und Lesen von Strichlisten	<input type="checkbox"/>	Anlegen und Lesen von Diagrammen			<input type="checkbox"/>	
Ergebnisse an den eigenen Erfahrungen prüfen					<input type="checkbox"/>	

<sup>12</sup> 1 Fehler führt dazu, dass zur benötigten Zeit 20 Sekunden addiert werden.