

## Zur Vorstellung von räumlichen Bewegungen

### 1 Zur Bedeutung des räumlichen Vorstellungsvermögens

Die Bedeutung des räumlichen Vorstellungsvermögens ist unumstritten:

- Beim Bewältigen vieler Alltagssituationen ist es unumgänglich, sich Objekte, Beziehungen zwischen Objekten sowie Prozesse räumlich vorzustellen.
- Spiele, wie beispielsweise das Bauen mit Bausteinen oder „Das Verrückte Labyrinth“ erfordern räumliches Vorstellungsvermögen.
- Der Berufserfolg in vielen Berufsgruppen korrespondiert mit dem räumlichen Vorstellungsvermögen. Das betrifft nicht nur solche Berufe wie Architekt oder Bauzeichner, bei denen das auf den ersten Blick einleuchtet.
- Bei der Mehrzahl aller Kinder mit Rechenschwäche ist diese auch auf Schwierigkeiten im räumlichen Vorstellen zurückzuführen.
- Nicht zuletzt wird das räumliche Vorstellungsvermögen als ein Primärfaktor der Intelligenz angesehen.

Das räumliche Vorstellungsvermögen umfasst unter anderem auch die Fähigkeit, sich gedanklich räumliche Bewegungen wie Verschiebungen, Drehungen, Klappungen, Faltungen usw. vorzustellen. Diese Fähigkeiten werden tagtäglich benötigt, wenn man gedanklich vorwegnimmt, wie Objekte eingepackt, eingeräumt oder transportiert werden. Darüber hinaus ist die Fähigkeit zur Vorstellung von räumlichen Bewegungen nicht zuletzt im Arithmetikunterricht von Bedeutung. Nach Lorenz (1998, S.182) werden Zahlen und Operationen in der Regel bei Schülern durch bildhaft vorgestellte Beziehungen repräsentiert. Die visuelle Repräsentation der vier Grundrechenarten liegt dann in Form von räumlichen Objekten (räumlich-simultan) und Bewegungen (zeitlich-sukzessiv) vor.

Liegen beispielsweise auf einem Tisch links 2 Äpfel und rechts 3 Äpfel, kann ein davor sitzendes Kind die Aufgabe  $2 + 3$  erfassen. Begibt es sich jedoch auf die andere Seite des Tisches, erfasst es die Aufgabe  $3 + 2$ . Die Erkenntnis, dass die Summanden vertauscht werden können, ohne dass sich am Ergebnis etwas ändert, kann also mit einer gedanklichen Bewegung um real vorhandene Objekte oder mit einer Bewegung dieser Objekte verdeutlicht werden. Diese gedankliche Rotation wird auch beim Erfassen der Kommutativität der Multiplikation verlangt: Beispielsweise werden aus  $4 \cdot 3$  Würfeln nach dem Drehen um  $90^\circ$  in der Ebene  $3 \cdot 4$  Würfel. An der Anzahl ändert sich auch hier nichts ...

Auch wenn in den folgenden Bauwerken die Anzahl der verwendeten Würfel bestimmt werden soll, ist es von Vorteil, zunächst in der Vorstellung eine räumliche Bewegung durchzuführen:



### 2 Das räumliche Vorstellungsvermögen fördern

Die Fähigkeit zur Vorstellung von räumlichen Objekten und Prozessen kann erwiesenermaßen in Lernprozessen erworben und verbessert werden. Untersuchungen belegen zudem, dass sich diese Fähigkeit besonders im Alter von 7 bis 14 Jahren entwickelt. Deshalb sollte gerade im Grundschulalter eine systematische Förderung des

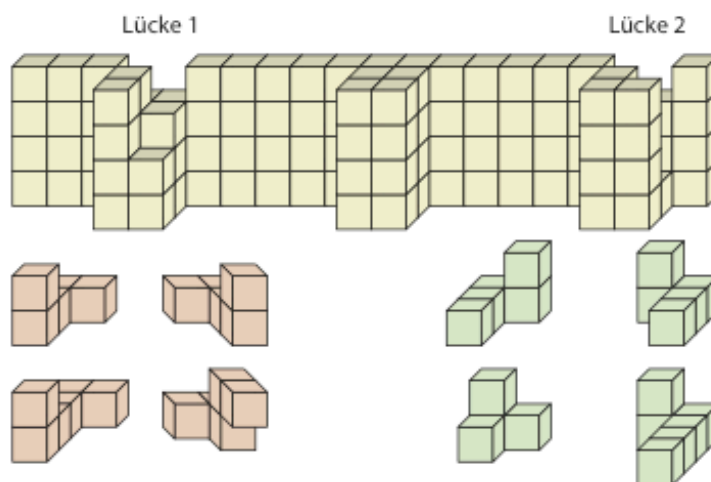
räumlichen Vorstellungsvermögens erfolgen. Das betrifft insbesondere auch die Fähigkeit zur Vorstellung von räumlichen Bewegungen.

Als Voraussetzung für eine planmäßige und systematische Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens muss zum einen die Frage geklärt werden, inwieweit sich Grundschul Kinder die Bewegung räumlicher Objekte vorstellen, inwieweit sie entsprechende Aufgaben lösen können.

Zum anderen bedarf es der Entwicklung geeigneter Aufgaben für den tagtäglichen Unterricht. Dazu führten wir an der Universität Rostock seit dem Jahr 1998 systematisch Untersuchungen durch. Eine dieser Untersuchungen soll hier näher dargestellt werden <sup>1</sup>.

### 3 Eine Schlossmauer wird repariert

Wir präsentierten Kindern zweiter und dritter Klassen die abgebildete Schlossmauer, die aus roten Würfeln zusammengebaut war. In der Mauer befinden sich Lücken, denn beim letzten Sturm waren ganze Mauerbrocken herausgefallen und liegen nun vor der Mauer. Ein kleiner Zwerg hat die Aufgabe, die Mauer zu reparieren, indem er passende Teile einsetzt. Er muss dazu aus Mauerbrocken, die vor der Schlossmauer liegen, die in die Lücke passenden auswählen. Jeweils einer der Mauerbrocken passt, die anderen Mauerbrocken unterscheiden sich vom passenden Teil entweder ganz offensichtlich in der äußeren Form oder sie sind das räumliche Spiegelbild des passenden Mauerbrockens. Dabei sind die Lücken so gewählt, dass die hineinpassenden Mauerbrocken nicht mit ihren räumlichen Spiegelbildern identisch sind.



Nun ist der Zwerg recht klein und schwach. Er möchte nicht jedes Teil anheben und probieren, ob es passt. Vielmehr will er erst das passende Teil herausfinden und es dann in die Lücke einsetzen. Die Kinder sollen ihm dabei helfen. In die Lücke will der Zwerg das Teil aber immer selbst heben – da hat er seinen Stolz. Die Kinder hatten so zunächst nicht die Gelegenheit, die Teile anzuheben und zu probieren.

Der Zwerg wollte sicher sein und die Entscheidung der Kinder verstehen. Er stellte den Kindern deshalb kritische Fragen, forderte immer wieder Erklärungen und Begründungen, warum ein ausgewähltes Teil passt. Das unterband ein Raten der Kinder. Im Versuch akzeptierten alle Kinder, dass der kleine Zwerg vieles nicht so schnell sah, nicht verstand, noch einmal nachfragte, eine Erklärung verlangte usw. Derartige Fragen hätten die

<sup>1</sup> Unser Dank gilt an dieser Stelle den Studentinnen Frau Nicole Schwekendieck und Frau Svea Kunst sowie Frau Michaela Dannenberger von der Grundschule Rostock-Evershagen.  
aus: Grundschulunterricht 52(2005)11

Versuchsleiter, von denen die Kinder wussten, dass sie die Antworten kannten, den Kindern nicht glaubwürdig stellen können. (vgl. Dehaene 1999)

Mit den Erklärungen gaben die Kinder Auskunft über ihre Fähigkeiten zum Vorstellen mentaler räumlicher Bewegungen.

Falls Kinder Schwierigkeiten hatten, ermutigte sie der ebenfalls ratlose Zwerg. So fragte er die Kinder beispielsweise, ob sie vielleicht einen oder mehrere der herumliegenden Mauerbrocken als garantiert nicht in die Lücke passend aussortieren können. Konnte ein Kind das und waren dann immer noch mehrere Mauerbrocken da, durfte es erst einmal mit einem Mauerbrocken in Ruhe probieren. Probieren durften auch alle die Kinder, welche der Mauer völlig ratlos gegenüberstanden.

Die Mauer hatte zwei Lücken, die nacheinander bearbeitet wurden. Somit konnten die Kinder Erkenntnisse und Erfahrungen, die sie bei der ersten Lücke gewonnen hatten, möglicherweise beim Entscheiden zur zweiten Lücke nutzen.

Beim Lösen der Aufgabe konnte beobachtet werden, auf welche Weise die Kinder den zum Schließen der Mauerlücke passenden Mauerbrocken herausfanden. Zugleich konnte erfasst werden, inwieweit die Kinder die herumliegenden Mauerteile auf Identität prüften und welche Strategien sie dazu anwandten.

In beiden Fällen war die zentrale Frage die, ob die Kinder die Objekte gedanklich rotieren oder aber nach äußeren Merkmalen erfassen und unterscheiden würden.

Beim Erfassen nach äußeren Merkmalen gibt es zwei Möglichkeiten:

- Das Objekt wird (zählend) kodiert, z.B. zwei Würfel nach oben - einer nach hinten - drei nach rechts
- Nur offensichtliche Merkmale wie „zu groß“, „zu klein“ usw. werden erfasst.

Von besonderem Interesse war für uns, ob und auf welche Weise die Kinder Objekte und ihre räumlichen Spiegelbilder unterscheiden konnten.

Die Arbeit der Kinder wurde per Videoaufzeichnung dokumentiert, anschließend transkribiert und klassifiziert. Um zu verstehen, was Kinder beim Lösen der Aufgaben denken, um den Verlauf des Lernens transparent zu machen, erfassten wir Handlung und Sprache des Kindes in Einheit und dokumentierten in den Transkripten wesentliche Handlungen der Kinder. Nachfolgend sollen einige typische Lösungswege der Kinder dargestellt werden.

#### **4 Rotationen vorstellen**

Wenn Kinder gedanklich drehten, um zu entscheiden ob ein Objekt passt, so benutzten sie Formulierungen wie den Stein „mit den Augen drehen“ oder „umdrehen, damit er reinpasst“. Sie unterstützten diese verbale Äußerung meist mit einer Hand- oder Fingerbewegung, die sie kreisförmig um die Achse ausführten, um die das Objekt rotiert werden sollte. Es kam aber auch vor, dass die verbale Äußerung allein nicht darauf schließen ließ, dass das Kind gedreht hatte. **Tan** beispielweise sagte nur „wenn ich das reinstecke“ und drehte parallel dazu den Stein gleichzeitig symbolisch mit der Hand um die Sagitalachse.

**Anne** fand auf Anhieb den passenden Mauerbrocken heraus:

**Z<sup>2</sup>**: Wie hast du denn das so schnell gemacht?

**A**: Einfach nur angeguckt (zuckt mit rechter Schulter).

**Z**: Ja aber – der ist doch viel zu krumm!

**A**: Wir müssen den dann umdrehen und darein stecken (vollzieht mit beiden Händen eine Drehbewegung)

**Eric** hat „mit den Augen gedreht“:

**E**: Also ich hab` den - ich hab` den einfach so mit den Augen gedreht.

**Z**: Wie?

**E**: Weil du den umdrehen musst um hier reinzupassen.(zeigt in der Luft eine Drehung um die Sagitalachse.)

**Richard** macht Drehbewegung mit dem Finger um die Sagitalachse:

**R**: Der hier (zeigt auf den in Lücke 1 passenden Mauerbrocken).

**Z**: Der müsste es sein? Warum?

**R**: Weil ich das so (schnelle Drehung mit dem Finger um die Sagitalachse) gesehen habe, dass dieses Teil (zeigt auf einen Würfel des Brockens) dahin (zeigt auf den Teil der Lücke, wo der Würfel hineinkäme) passen würde und dieses Teil würde dahin passen.

Richard hat also die Mauerbrocken gedreht und gedanklich in die Lücke bewegt. Er erfasst auch, dass das räumliche Spiegelbild des passenden Mauerbrockens nicht in die Lücke passt:

**R**: Dann müsstest du dir das so vorstellen, dass du mit den Augen diesen Teil drehst - das Teil drehst. (Zeigt auf Stein und Lücke)

## 5 Nach äußeren Merkmalen entscheiden

Kinder, die nach äußerlichen Merkmalen entschieden, verwendeten als Kriterium oft die Länge des betreffenden Mauerbrockens. Die Kinder äußerten dann, der Stein sei „zu klein“, „so tief“ oder „zu lang“ usw.

Andere Kinder gingen von der Lücke aus und schauten dann, ob das Mauerstück von der Größe her hineinpassen würde. So erklärte **Jennifer**, dass der Stein passt, begründete das damit, dass „die Lücke auch so groß ist“ und zeigt parallel zum Sprechen mit der Hand die Übereinstimmung von Größe der Lücke und Größe des Mauerbrockens.

**Katja** bestimmte die Anzahl der Würfel der Mauerbrocken und verglich unter diesem Gesichtspunkt die herumliegenden Mauerbrocken mit der Lücke in der Mauer. Sie argumentierte dann folgendermaßen: „Dass diese zwei (zeigt auf Würfel im Mauerbrocken) dahin passen und diese drei (zeigt auf Würfel im Mauerbrocken) hier oben.“

**Felix** erkannte sofort, dass ein Brocken zu klein war:

**Z**: Der passt nicht?

**F**: Weil der zwei Steine zu klein ist.

## 6 Räumliche Spiegelungen erkennen

Kinder, die erkannt hatten, dass es sich bei dem vorliegenden Objekt um das räumliche Spiegelbild des passenden Mauerbrockens handelt, begründeten beispielsweise mit: „Der ist andersherum“, „einer ist links, einer ist rechts“, „dieses Teil ist umgedreht, ist das umgedrehte von dem“, ist „falsch herum“ oder „verkehrt herum“. Unterstützt wurde die Argumentation oft, in dem die Steine real oder in der Vorstellung so gedreht wurden, dass die Spiegelung gut sichtbar wurde oder indem die Kinder den Mauerbrocken und sein räumliches Spiegelbild direkt nebeneinander hielten.

**Nadine** stellte den in Lücke 1 passenden Stein und sein räumliches Spiegelbild nebeneinander:

**Z:** Oder sind die gar nicht gleich?

**N:** In Wirklichkeit nicht.

**Z:** Worin unterscheiden sie sich denn? Wo sind sie nicht gleich?

**N:** Weil einer ist links und einer ist rechts.

**Jennifer** meinte zuerst, der in Lücke 1 passende Stein und sein räumliches Spiegelbild seien gleich. Nach dem Hantieren mit den Steinen korrigiert sie rasch.

**Z:** Und der (zeigt auf den gespiegelten Stein)?

**J:** Der könnte auch passen.

**I:** Meinst du, die passen beide?

**J:** (Nickt)

**I:** Sind die denn gleich?

**J:** (Nickt, probiert beide Steine aus) Der passt aber nicht. Der ist ein bisschen anders.

Auch Francis war sich zuerst nicht sicher, ob die beiden Mauerbrocken nicht doch gleich sind:

**Z:** Und, ähm, paßt vielleicht auch noch einer der anderen Steine?

**F:** Mhm (Nimmt gespiegelten Stein in die Hand).

**Z:** Du meinst der kann auch passen?

**F:** Ja.

**Z:** Warum kann der auch passen?

**F:** Weil der auch so lang ist. (probiert es aus) (...) Der passt aber nicht.

**Z:** Warum passt der denn nicht?

**F:** Weil der wieder falsch herum ist. (Stellt die Steine nebeneinander, zeigt es dem Zwerg.)

## 7 Rotierer und Kodierer

Diese Auswahl an Zitaten zeigt, dass Kinder der Klassen 2 und 3 sowohl äußere Merkmale als auch Drehungen heranziehen, um zu entscheiden, welcher der Mauerbrocken in die vorgegebene Lücke passt.

Interessant ist, dass alle Kinder, die in der Lage waren, das Objekt räumlich zu bewegen, auch auf äußere Merkmale der Mauerbrocken hinwiesen, sie erfassten. Viele der „Rotierer“ verwiesen dann auf äußere Merkmale, wenn diese offensichtlich waren und eine schnelle Entscheidung ermöglichten. Vor allem aber erkannten alle diese „Rotierer“ den Unterschied zwischen einem Mauerbrocken und seinem räumlichen Spiegelbild.

Alle Kinder, die sich ausschließlich an äußeren Merkmalen orientierten und nicht gedanklich rotierten, konnten jene Mauerbrocken herausfinden, die offensichtlich nicht in die Lücke passten. Diese „Kodierer“ hatten aber allesamt Probleme, einen Mauerbrocken von seinem räumlichen Spiegelbild zu unterscheiden. Sie mussten hier erst ausprobieren, ehe sie erkannten, worin der Unterschied bestand.

Die Arbeit eines Kindes an der Mauer betrug zwischen 6 und 12 Minuten. Alle Kinder erhielten viel Zeit, wurden zum Probieren, zum Beschreiben und Begründen ermutigt. Immer wieder wurden sie aufgefordert, nicht nur zu probieren, sondern vor dem Probieren zu vermuten und die Vermutung zu erklären

Die Lernfortschritte aller Kinder in dieser Zeit waren beträchtlich. Allein die Verkürzung der Bearbeitungszeit von Lücke 1 zu Lücke 2 ist beachtlich.

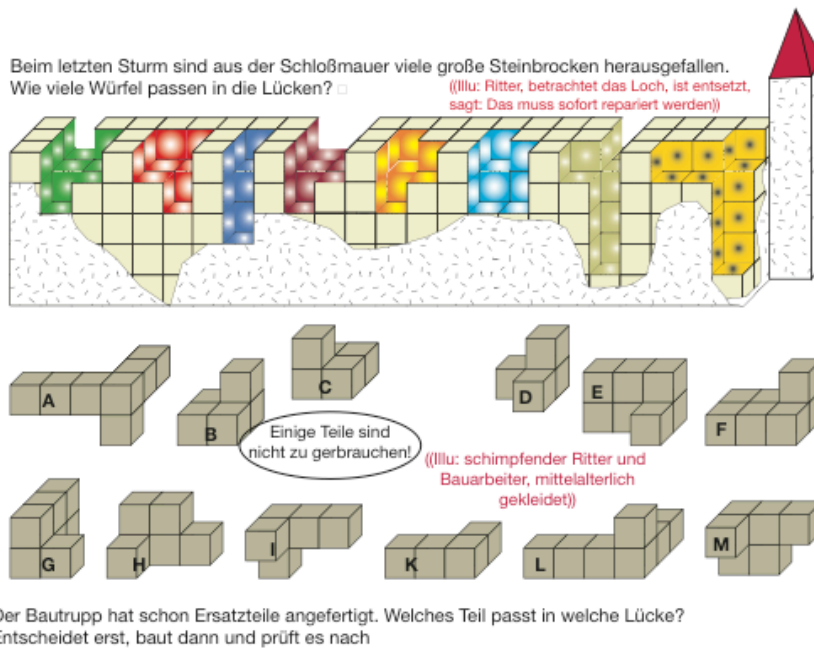
---

<sup>2</sup> Z bezeichnet hier die Äußerungen des Zwerges  
aus: Grundschulunterricht 52(2005)11

## 8 Konsequenzen für den Unterricht

Die Erfahrung aus der Arbeit mit dieser Lernumgebung zeigt zum einen deren Eignung. Die Kinder bearbeiten die Aufgaben hoch motiviert. Alle Kinder fanden Zugänge zur Aufgabe und konnten die Aufgabe lösen. Sie benötigten dafür unterschiedlich viel Zeit und unterschiedlich stark die Möglichkeit, Handlungserfahrung zu sammeln.

Es scheint deshalb zweckmäßig, derartige oder andere Aufgaben im Unterricht gezielt einzusetzen. Ein Beispiel ist die folgende Aufgaben:



Als Möglichkeit für ein differenzierendes Arbeiten an der Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens wurden von uns Aufgabenangebote<sup>3</sup>, darunter die oben abgebildete Schloßmauer sowie Aufgaben zum räumlichen Rotieren von Körpern erprobt und unter [www.mathematikus.de](http://www.mathematikus.de) im Internet zusammengestellt<sup>4</sup>. Die Kinder können sie interaktiv und individuell ihrem Lerntempo entsprechend bearbeiten

## Literatur

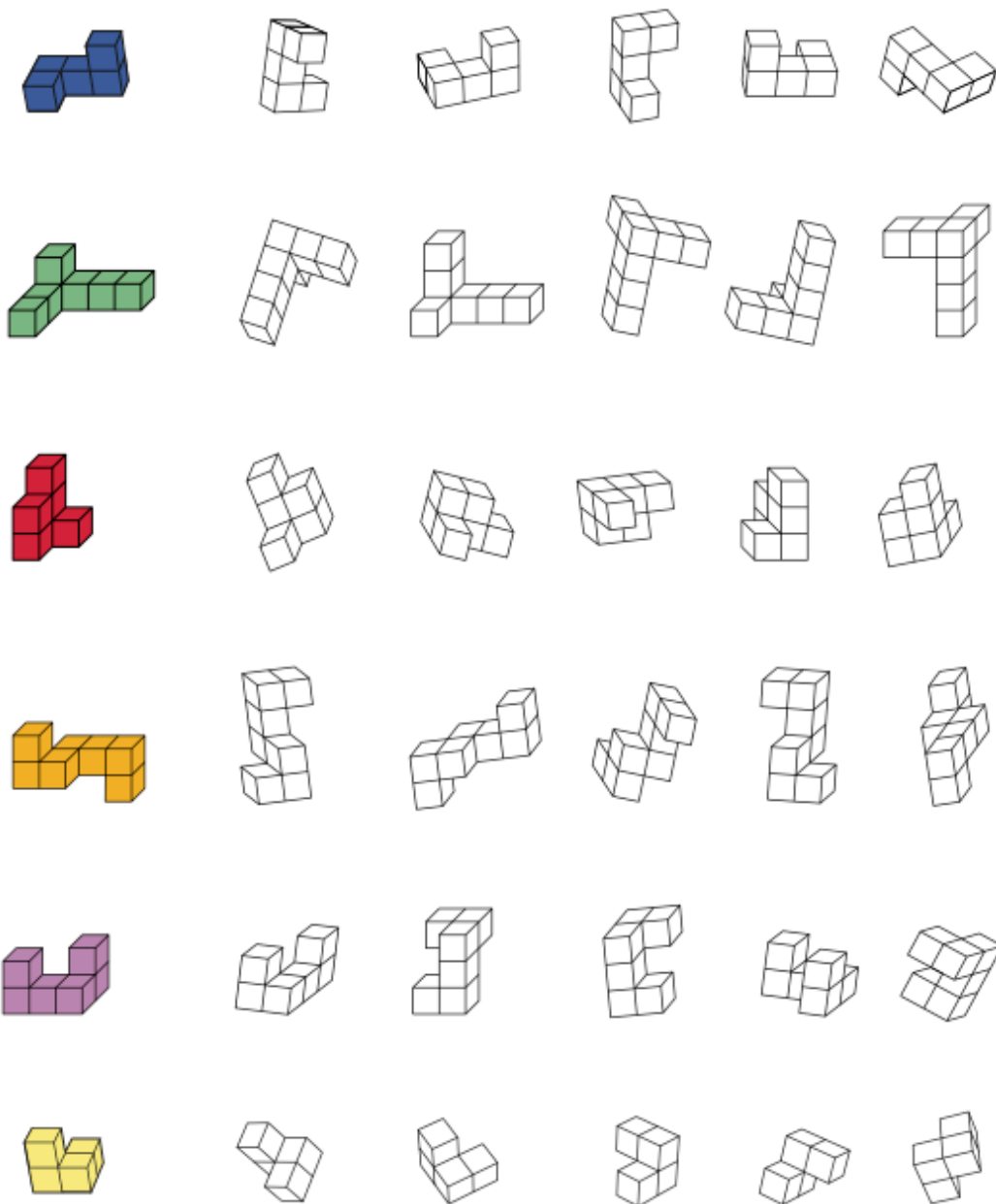
- Cooper, L.A. ; Shepard, R. N.: Rotationen in der räumlichen Vorstellung. – In Wahrnehmung und visuelles System. – S. 122-129. – Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft, 1987
- Dehaene, S.: Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können. Berlin/Basel: Birkhäuser, 1999
- Eichler, K.-P. (Hrsg.): Denken und Rechnen. Lehrbuch für die Klasse 3. – Braunschweig: Westermann, 2005
- Lorenz, J. H.: Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. - Göttingen: Hogrefe, 1998
- Lorenz, J. H. (Hrsg.): Mathematikus. – Lehrwerk für die Klassen 1 bis 4. – Braunschweig: Westermann, 1999 – 2002
- Schwekendieck, N.: Zur Analyse und Entwicklung von Fähigkeiten zur Vorstellung räumlicher Bewegungen bei Grundschulern. – Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen. – Rostock: Philosophische Fakultät der Universität, 2000

<sup>3</sup> Unser besonderer Dank für die kritischen Hinweise zu den Aufgaben im Internet und die Geduld in den Erprobungsphasen gilt hier den Kolleginnen der Grundschulen Rostock-Warnemünde und Lichtenhagen-Dorf

<sup>4</sup> Die Arbeitsblätter zeigt zwei der in Internet verfügbaren Aufgaben. Anregungen und Hinweise zu den Aufgaben im Internet sind den Autoren unter der Adresse [mathematikus@mathematikus.de](mailto:mathematikus@mathematikus.de) willkommen. aus: Grundschulunterricht 52(2005)11

Wie kann man den Würfel auf den Feldern so kippen, dass er wie der Rechte da liegt? Male die richtige Antwort bunt an.

		erst nach hinten dann nach rechts	erst nach rechts dann nach vorn	erst nach rechts dann nach hinten
		erst nach links dann nach hinten	erst nach links dann nach vorn	geht nicht
		erst nach hinten dann nach rechts	erst nach rechts dann nach vorn	erst nach rechts dann nach hinten
		erst nach links dann nach hinten	erst nach links dann nach vorn	geht nicht
		erst nach vorn dann nach links	erst nach rechts dann nach vorn	erst nach vorn dann nach rechts
		erst nach hinten dann nach rechts	erst nach links dann nach vorn	geht nicht
		erst nach links dann nach vorn	erst nach rechts dann nach hinten	erst nach rechts dann nach vorn
		erst nach links dann nach hinten	erst nach vorn dann nach rechts	geht nicht
		erst nach hinten dann nach links	erst nach rechts dann nach vorn	erst nach rechts dann nach hinten
		erst nach links dann nach hinten	erst nach links dann nach vorn	geht nicht



Male rechts die Körper an, die so sind, wie der farbige Körper.