Jens Holger Lorenz (PH Heidelberg)

Das Schulwerk Mathematikus

Der Mathematikus und entdeckendes und soziales Lernen

Das Vorangehende wird im Unterricht realisiert durch das Prinzip des entdeckenden Lernens. Es beinhaltet eine aktivere Rolle der Schüler und damit eine Zurücknahme der instruierenden Lehrerrolle. Der Unterricht muss aber andererseits Gewähr dafür bieten, dass eine aktive, intensive Auseinandersetzung der Schüler mit dem Lerngegenstand stattfindet. Ein kleinschrittiges Abarbeiten und in leicht verdauliche Happen dargebotene Lerninhalte können diesem Prinzip nicht genügen. (Der Zusatz "aktiv" zu dem traditionellen Begriff "Entdeckendes Lernen" erübrigt sich, da passives Lernen aus prinzipiellen Gründen unmöglich ist.)
Ein Ausgehen von ganzheitlichen und durchaus komplexen Situationen, die eine reichhaltige Struktur besitzen, so dass in durchaus verschiedener Weise die Kinder sich diesem Gegenstand nähern können, befördern dies.
Die Ausgangs- oder Sachsituation muss also derart vielschichtig angelegt sein, dass sich mannigfaltige und unterschiedliche Entdeckungen darin machen lassen. Erst dann wird auch die Bedingung zu einem sozialen Austausch und zum Lernen voneinander notwendig. Die Diskussion der verschiedenen Perspektiven, das Begründen und Argumentieren des eigenen Standpunktes, das Erleben der unterschiedlichen Denkweise der Mitschüler stellt den eigentlichen Kern des Mathematikunterrichtes dar. Aus diesem Grunde muss auch von der Unterrichtsorganisation her gewährleistet sein, dass dieser Austausch zwischen den Schülern stattfinden kann. Die Diskussion über die verschiedenartigen Strategien, die Vielfalt der von den Schülern einer Klasse verwendeten Strategien, sollte idealerweise den Hauptgegenstand des Unterrichtes ausmachen.
Dies bedeutet aber auch, dass der Lerngegenstand in einer ganzheitlichen Form präsentiert werden muss. Die klassenöffentliche Diskussion über die verschiedenen Lösungswege (auch die falschen) erfordert es, dass der Inhalt wieder aufgenommen und neu durchgearbeitet werden muss. Was klassischerweise unter "Einführung", "Durcharbeiten", "Üben" und schließlich "Anwenden" als Unterrichtsphase etikettiert wurde, ist jetzt ein Wiederaufnehmen unter neuen, veränderten Perspektiven. Im Mathematikus wird dies dadurch zu realisieren versucht, dass thematisch zusammenhängende Gegenstände in aufeinanderfolgenden Zeiten behandelt werden. Zudem werden rückgreifend die Lerngegenstände immer wieder aufgenommen. Es ist lediglich zu gewährleisten, dass die Schüler in eine Seite oder eine thematische Doppelseite eingeführt werden und die Sachsituation oder Darstellungsformen verstehen. Die intensivere Bearbeitung geschieht in Einzel- oder Partnerarbeit mit dem Schülerarbeitsbuch.
Hierbei sind Differenzierungsformen vorgesehen, was auch bedeutet, dass nicht jede Seite des Arbeitsbuches von allen Schülern bearbeitet werden muss, im Gegenteil! Das Schülerarbeitsbuch stellt für einige Schüler möglicherweise ein Überangebot dar. Dies verlangt allerdings vom Unterrichtsklima, dass es selbstverständlich ist, dass nicht alle Schüler das gleiche machen müssen. So können sich Interessen und Fähigkeiten in unterschiedlicher Weise ausdrücken und entwickeln. Auf diese Weise erreichen die Schüler eine Bewusstheit ihres eigenen, individuellen Lernens, ihrer individuellen Besonderheiten, ihrer Vorgehensweise, ihrer bevorzugten Verfahren und Darstellungsformen. D. h. sie werden sich über ihr

eigenes Denken bewusst. Dieser meta-kognitive Aspekt sollte im Mathematikunterricht nicht unterschätzt werden. Auch dies stellt sich aber nur langfristig, im Verlauf vieler Schuljahre ein.
Auf der inhaltlichen Ebene verhindert dies entsprechend die Sichtweise, Mathematik sei etwas Starres und Rigides, das nur mit dem Kriterium "richtig" oder "falsch" zu bewerten sei.
[nach oben]

Der Mathematikus und der Umgang mit Fehlern und dem Denken der Kinder
Bereits 1965 charakterisierte der amerikanische Mathematikdidaktiker und Psychologe Ausubel den Mathematikunterricht folgendermaßen:
"Er stützt sich schwerpunktmäßig auf Auswendiglernen von Formeln, Verfahrensschritten, auf das Wiedererkennen stereotyper Aufgabenklassen und auf die Manipulation von Symbolen".
Das heißt, Lernprozesse werden in einem solchen Mathematikunterricht entlang der scharfen Unterscheidung richtig – falsch, wahr – unwahr geleitet und bewertet. Falsches, die Fehler der Schüler also, sind auszumerzen. So ist dann auch die panische Angst einiger Lehrer vor einem Fehler an der Tafel zu verstehen, der die Schüler verwirren könnte oder sich gar einprägen würde.
Ein moderner Unterricht ist hingegen auch ein diagnostisches Vorgehen und basiert auf dem Prinzip, die systematischen Fehler von Schülern zu identifizieren. Hierbei werden Fehler nicht tabuisiert und können aus dem Unterricht nicht ausgeklammert werden, sonst entwickeln Schüler im Laufe ihrer Schulzeit Angst vor Fehlern.
Es erscheint sinnvoll, Schüler beim Experimentieren und damit beim Fehlermachen zu unterstützen, um diese Denkfehler in der Klasse zu diskutieren. Hierzu muss innerhalb der Klasse ein Klima des wechselseitigen Respektes herrschen, und es muss die Rollenverteilung zwischen den Schülern als den Lernenden und dem Lehrer als dem Wissenden aufgebrochen sein. Schüler und Lehrer müssen die Meinung des anderen auch dann achten, wenn sie mit dieser nicht übereinstimmen. Unter solchen Bedingungen ist es möglich, eine Atmosphäre sozialen und kooperativen Lernens zu etablieren. Fühlt sich ein Schüler sicher, seine Ideen, mögen sie richtig oder falsch sein, ausdrücken zu dürfen, dann kann er auch umgekehrt die Gedanken und Beiträge anderer Schüler besser anerkennen und mit seinen eigenen vergleichen.
Das Verstehen mathematischer Inhalte besteht nicht darin, ein Faktum als richtig hinzunehmen, weil es der Lehrer als Experte geäußert hat, sondern selbst dieses Faktum begründen zu können. Schüler müssen ihre Antworten reflektieren und Schlussfolgerungen rechtfertigen. Erst dann gelingt ihnen eine tiefere Einsicht in die mathematische Struktur, die dem anstehenden Problem unterliegt. Dies setzt sich von der schlichten Suche nach einem approbaten Rechenverfahren, um eine brauchbare Lösung zu bestimmen, ab. Auf diese Weise hat der Lehrer Gelegenheit, sorgfältig zu beobachten, was die Schüler wissen und wie sie denken. Die individuellen, häufig kreativen und originellen Methoden, die Schüler bei mathematischen Problemen anwenden, blieben unbemerkt, wenn sie nicht mit anderen in einer offenen Diskussion ausgetauscht werden. Und häufig kommen Schüler auch dann zu einer richtigen Lösung, wenn sie falsche, defiziente Verfahren anwenden. Dies entzöge sich der Beobachtung.
Auch leistungsstärkere Schüler versuchen gelegentlich, Routinen in den Algorithmen auswendig zu lernen und finden es schwierig, ihr eigenes Problemlöseverhalten zu erklären und zu begründen. Grade dieses Fehlen einer Diskussion zwischen Schülern zugunsten einer formalen Abarbeitung führt zu weiteren Fehlvorstellungen. Wichtig für die Schüler ist es ja, die in einem Problem zugrundeliegende mathematische Struktur zu verstehen, wenn ihre mathematischen Fähigkeiten weiter entwickelt werden sollen.
"Ein Mathematiker zu sein, wird genausowenig darüber definiert, eine Menge mathematischer Sätze zu wissen, wie man einen Dichter nicht definiert als jemanden, der eine Menge linguistischer Fakten weiß", sagte der Mathematikdidaktiker und Informatiker Pablot.
Der entdeckende Mathematikunterricht stattet die Schüler nicht mit einer erfolgreichen Technik aus, die sie unbesehen in anderen Situationen und blind bei vergleichbaren Aufgabenklassen anwenden können. Vielmehr werden sie in einem Problemkontext eingeführt, der den Weg für eine durchaus konfliktreiche Diskussion ebnen soll. Aufgaben und Material können durchaus Schülerfehler provozieren. Wenn eine falsche Strategie von einem Schüler angewendet wird, dann allerdings meist deshalb, weil sie sich in anderen Situationen als durchaus günstig erwiesen hat, der Schüler aber die Begrenztheit seiner Strategie nicht überblickt. So ist beispielsweise das Vorwärts- oder Rückwärtszählen ein durchaus gangbarer Weg bei der Addition oder Subtraktion, aber für wachsende Zahlenbereiche kaum günstig, sondern

zeitaufwendig und fehleranfällig. Aber erst wenn die Schüler feststellen, dass ihre Strategie unangemessen ist, werden sie verstehen, warum ein neuer Weg und ein neues Verfahren eingeschlagen werden müssen. Der schlichte Hinweis, dass man nun eine neue Strategie habe und diese zu lernen sei, hilft hierbei wenig und ist auch kaum überzeugend.

Die Fehler und Fehlvorstellungen eines Schülers werden in einem entdeckenden, sozial betontem Unterricht nicht von den anderen Kindern abgeschirmt, im Gegenteil. Fehler werden als durchaus positiv angesehen, und die Suche nach Fehlern wird unterstützt. Der Unterricht hat hierbei die überaus wichtige Aufgabe zu klären, wie Fehler günstig verwendet werden können, auch im mathematisch-inhaltlichen Bereich. Er versucht in Schülern die Einstellung zu festigen, ihre Arbeiten, Gedanken und Lösungsansätze zu diskutieren.

Die im Vorangehenden diskutierte Form für den Mathematikunterricht beinhaltet eine deutlich veränderte Lehrerrolle. Diese drückt sich auch in der Plazierung des Lehrers innerhalb des Klassenraumes aus. Wo der Lehrer jeweils steht, beeinflusst in deutlichem Maße die Diskussion zwischen den Schülern. Steht er vorn an der Tafel, dann "führt" er den Unterricht, die Schüler warten darauf, dass die richtige Lösungsstrategie von ihm geklärt wird. Verändert er hingegen seinen Platz nur geringfügig, bewegt er sich etwa auf die Seite des Klassenzimmers oder in den hinteren Raumabschnitt, dann wird er selbst ein Teil der Klasse, und die Schüler sind eher bereit, untereinander zu interagieren und das Wort an Mitschüler zu richten.

Diskussionen zwischen Schülern passieren nicht einfach so, der Lehrer muss sich seiner sprachlichen und nicht-sprachlichen Signale bewusst sein. Benutzt er Worte wie "gut", "richtig" oder selbst nur "ja"/"nein" bzw. nickt er mit dem Kopf in Anerkennung der richtigen Antwort, dann verhindert dies, dass andere Kinder ihre alternativen Lösungsversuche auszudrücken und zu begründen versuchen. Damit Schülervorschläge diskutiert werden, ist es günstiger, mit den fehlerbehafteten Strategien zu beginnen. Werden die fehlerhaften vor den richtigen Lösungen berichtet, dann sind die Schüler eher geneigt zu diskutieren, warum sie eine bestimmte (Fehl-) Strategie verwendet haben. Dies tritt aber nicht auf, wenn eine gute Erklärung für einen richtigen Lösungsweg am Anfang der Diskussion steht.

Für den Lehrer besteht eine Aufgabe darin, die Schüler in ihrer aktiven Diskutantenrolle zu ermutigen und ihnen die Möglichkeit zu geben, miteinander die Vorteile und Tücken verschiedener Lösungsstrategien selbst herauszufinden. Die selbsttätige Anteilnahme und Aneignung ist nach dem Schweizer Psychologen Piaget die Schlüsselvoraussetzung für die Entwicklung und das Behalten neuer Ideen. Ein Übernehmen und schlichtes Akzeptieren von Rechenverfahren erbringt kaum neue Einsichten (auch wenn dies im gängigen Mathematikunterricht gemeinhin angenommen wird).

[nach oben]

Wie kommen Zahlen in den Kopf der Kinder:
Die Wichtigkeit eigener Konstruktionen

Lernen ist ein individueller Vorgang, auch wenn er im Beisein vieler anderer Kinder im Klassenraum stattfindet. Es gilt ja, das Gehörte und Gesehene an die eigenen Vorerfahrungen anzubinden und mit dem Vorwissen zu verknüpfen. Dass die Lernwege hierbei sehr unterschiedlich ausfallen, wurde schon mehrfach betont. Es ist die eigene geistige Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand, die Lernen überhaupt ermöglicht. Jeder einzelne Schüler versucht, dem Lerninhalt Bedeutung abzugewinnen, allerdings: seine eigene, individuelle Bedeutung. Er konstruiert den Sinn, den der Inhalt für ihn macht. Dies mag nun für den Lehrer kompliziert anmuten, hat er es nun doch mit vielleicht dreißig verschiedenen Sinnzuschreibungen und Konstruktionen zu tun. Aber es ist nicht notwendig seine Aufgabe, allen einzelnen geistigen Konstruktionen der Schüler nachzuspüren und sie in jedem Moment des Unterrichtes verstehen zu wollen. Dies wäre sicherlich eine Überforderung. Was wir hier meinen ist, dass die eigenen Konstruktionen notwendig für das Verstehen von Mathematik (und auch für andere Inhalte) sind.

Um nun solche Konstruktionen beim Schüler hervorzurufen, versucht das Lehrwerk auf die bloße Aufnahme von Lösungswegen und Verfahren zu verzichten und statt dessen die Schüler zu eigenen geistigen Aktivitäten zu animieren. Der leere Zahlenstrahl ist aus unserer Sicht hierbei ein überaus günstiges Mittel. Während bei einem herkömmlichen Zahlenstrahl, der die Markierungen für die einzelnen Zahlen bereits enthält, auch ein Weiterzählen als Lösungsweg möglich ist, verlangt der leere Zahlenstrahl die selbsttätige Konstruktion, er verlangt, dass der Schüler sich die Struktur der Zahlbeziehung vorstellt.

Darüber hinaus ermöglicht der leere Zahlenstrahl in sehr viel einfacherer Weise die Darstellung unterschiedlicher Strategien, die von den Schülern verwendet werden. Die Entscheidung über Strategien

bei einer vorgegebenen Aufgabe setzt schon eine Konstruktion im Kopf des Schülers voraus. Natürlich bedingt dies, dass verschiedene Lösungswege oder Strategien dem Schüler bekannt sind. Er muss sie erlebt und auch selbst erprobt haben. Anderenfalls fällt er in den Eingangsklassen (manchmal auch darüber hinaus) auf die ihm vertraute und durchaus erfolgversprechende Strategie des Vorwärts- oder Rückwärtszählens zurück. Dieser, in einer bestimmten Phase zwar notwendigen, aber langfristig gesehen wenig erfolgversprechenden (Primitiv-) Strategie versucht der leere Zahlenstrahl entgegenzuwirken. Die Motivation, sich krafvollerer Strategien zu bedienen, ist für die Schüler hier schon aus arbeitsökonomischen Gründen einsichtig.
Es ist sicher ausgesprochen schwierig, die mit mathematischen Inhalten verbundenen individuellen Konstruktionen der Schüler zu diagnostizieren. Der leere Zahlenstrahl ist aber auch für die Diagnose individueller Fehlvorstellungen hilfreich.
Die Darstellungen der Schüler am leeren Zahlenstrahl sind somit einerseits hilfreich für den Lehrer, andererseits dienen sie aber, wie alle Veranschaulichungen, der Diskussion zwischen den Schülern. Die Darstellungen sind ein Medium der Kommunikation im Klassenzimmer.
[nach oben]

Mathematikus und Produktives Üben
Nachdem es über längere Zeit verpönt war, kommt nun dem Üben wieder eine größere Bedeutung zu. Hierbei wird Üben aufgefasst als intensive Auseinandersetzung mit dem Lerninhalt. Üben ist kein Selbstzweck zur Automatisierung, auch wenn bestimmte Teile des mathematischen Lerninhaltes einmal fest im Gedächtnis verankert sein müssen. Üben steht aber vornehmlich im Dienste des Verstehens. Aus diesem Grunde sind produktive Übungsformen notwendig, in denen die Struktur und die Zahlbeziehungen deutlich werden. In den ersten Schuljahren stehen den Schülern "Zahlenhäuser" und "Zahlenpyramiden" sowie diverse Formen von "Zahlenquadraten" und "Rechenscheiben" zur Verfügung. Einerseits wird durch eine systematische Variation in den Aufgaben der Beziehungsreichtum der Zahlen deutlich, zum anderen sind (Vorsicht!) auch Fehler eingebaut, die von den Schülern gefunden werden sollten. Da die Aufgaben nicht immer einem ganz strengen Schema folgen, sondern Störaufgaben eingebaut sind, können die Aufgaben von den Schülern nicht blind gelöst werden. Ein rein schematisches Vorgehen führt also nicht zum Erfolg, es erlaubt dem Lehrer auch, eine Kontrolle über die Denkweise der Schüler.
Die Beziehungen zwischen den Zahlen werden z. B. durch gegensinniges Verändern bei der Addition und gleichsinniges Verändern bei der Subtraktion deutlich.
Da bei allen Formaten auch "leere Aufgaben" eingebaut sind, erhalten die Schüler die Möglichkeit, das entdeckte Prinzip weiterzuführen oder zu variieren. Darüber hinaus können sie auch den im Unterricht behandelten Zahlraum verlassen und sich in noch unbekannte, wenig vertraute Zahlenräume hineinwagen. Auch dies ist ein Mittel der Differenzierung, da es den leistungsstärkeren Schülern gelingt, ihre gewonnenen Erkenntnisse auf neue Bereiche zu übertragen oder sie zumindest dort zu erproben. Leistungsschwächere Schüler können hingegen in dem ihnen vertrauten Zahlenraum verbleiben.
Auch bei den Übungsformaten, die in dem Schulbuch und dem Schülerarbeitsbuch vorgegeben werden, wurde versucht, dem Prinzip der Sparsamkeit zu folgen. Es erscheint nicht sinnvoll, durch ein Überangebot an Aufgabenformen den Lernprozess der Schüler zu erschweren. Aufgabenformen und -formate müssen jeweils von den Schülern neu gelernt werden. Aus diesem Grunde erscheint es günstiger, einmal eingeführte Formate nur leicht zu variieren oder lediglich auf den neuen Zahlraum zu erweitern. Besonderes Augenmerk wurde auf die Zehnerzerlegung gelegt, die bei der Addition und Subtraktion, zumindest bei einigen Strategien, unabdingbar ist. Sie tritt aus diesem Grunde wiederholt und häufig im Schülerarbeitsbuch auf, wobei sich die Geschichte der "verliebten Herzen" (1/9, 2/8, 3/7, ...) als durchaus hilfreich und motivierend für die Schüler erwiesen hat.
Da die Automatisierung einiger weniger Zahlensätze für die Eingangsklassen notwendig ist, gibt es einen Kursus "Schnellrechnen". Hierbei handelt es sich um Aufgaben, die mündlich gestellt werden, und aus diesem Grunde nicht im Schulbuch oder im Schülerarbeitsbuch erscheinen. Entsprechende Hinweise sind im Lehrerhandbuch gegeben.
[nach oben]

Mathematikus und Differenzierung

Auch wenn bei der Einschulung die Schüler in der Regel relativ altershomogen sind, so ist ihre kognitive Entwicklung doch bis zu vier Jahren auseinander. Einige Schüler sind auf dem Entwicklungsstand von Fünfjährigen, andere verfügen bereits über Fähigkeiten im arithmetischen Bereich, die Achtjährigen vergleichbar sind. Aus diesem Grunde erscheint es eine Unmöglichkeit, den Unterricht auf einen fiktiven "Durchschnittsschüler" anzulegen, den es in der Klasse auch gar nicht gibt.
Andererseits erscheint es auch nicht durchgängig praktikabel, für sämtliche Schüler individuelle Aufgaben vorzusehen oder bereitzuhalten. Die Form der offenen Aufgaben wirken als natürliche Differenzierung, da sie von den Schülern in einer unterschiedlichen Tiefe bearbeitet werden können und unterschiedliche Wege und Strategien zulassen. Allerdings werden für die Schüler gleiche Themen angeboten, das Schwierigkeitsniveau wird aber vom Schüler selbst gewählt.
Lernschwächere Schüler werden zudem verstärkt und über einen längeren Zeitraum auf Material zurückgreifen, das die Ausbildung von Vorstellungsbildern für die arithmetischen Operationen unterstützt. Leistungsstärkere Schüler hingegen werden frühzeitig auf die Manipulation konkreter Materialien verzichten wollen. In beiden Fällen liegt eine implizite Differenzierung vom Schüler vor. Jeder einzelne Schüler ist so in der Lage, seinen Wissensstand, seine Fähigkeiten in günstigster Weise einzubringen.
Die Diskussion über unterschiedliche Lösungswege ermöglicht den Schülern, sich selbst passende Strategien auszuwählen. Passend heißt hierbei nicht nur in Bezug auf die Aufgabe, sondern auch in Bezug auf das individuelle Kind. Vorteilhaft ist hierbei, in der Diskussion mit den suboptimalen Strategien zu beginnen. Werden die elaborierten Lösungswege der leistungsstarken Schüler zuerst diskutiert, dann werden leistungsschwächere Kinder sich nicht mehr zu Wort melden und damit der Möglichkeit beraubt, ihr eigenes Verfahren zu erklären, zu erläutern und in der Auseinandersetzung mit den anderen zu verbessern.
Das Schülerarbeitsbuch sieht Aufgaben vor, die nicht von allen Schülern bearbeitet werden müssen. Hierzu gehören die Knobel-, Forscher- und Problemaufgaben, die sich vornehmlich an leistungsstärkere Schüler richten. Sie werden zwar von allen Schüler bearbeitet, aber die Möglichkeit, Verallgemeinerungen und Vertiefungen zu finden, wird von den Kindern unterschiedlich genutzt.
Darüber hinaus sind im Lehrerhandbuch Anmerkungen für mögliche Schwierigkeiten aufgenommen, die bei einzelnen Schülern auftreten können. Dies ist jeweils als *Hinweis* für individuelle Leistungsstörungen anzusehen, die zukünftiges Mathematiklernen beeinträchtigen können. Leistungsstörungen werden hier durch das Zusammentreffen von Besonderheiten des Kindes mit Merkmalen des Unterrichs bzw. des Lernstoffes verursacht verstanden, ohne dass damit Schuldzuweisungen verbunden sind.
Diese Frühhinweise für Lernschwierigkeiten sind für Lehrerinnen und Lehrer gedacht, die auch aus anderen Unterrichtsfächern bestimmte kognitive Auffälligkeiten beobachten können. Es ist aber keineswegs vorgesehen, nun auf jedes Anzeichen möglicher Schwierigkeiten zu reagieren. Insbesondere ist kein therapeutisches Programm für leistungsschwächere Kinder geplant. Allerdings werden im Lehrerhandbuch Möglichkeiten angedeutet, wie im Förderunterricht durch Variation der Aufgaben den Schwierigkeiten begegnet werden kann.
[nach oben]

Lernkontrollen im Mathematikus

Da der Mathematikunterricht wesentlich auf die Entwicklung von arithmetischen Strategien abzielt, ist eine Überprüfung in Form eines punktuellen Testes diagnostisch nur bedingt hilfreich. Vielmehr wird durch die Diskussion innerhalb der Klasse und durch die Bearbeitung der Aufgaben im Schülerarbeitsbuch deutlich, welche Strategien von den Schülern bevorzugt werden, der Rückgriff auf Materialien gibt Hinweise darüber, wie entwickelt die Denkprozesse bei den Kindern sind. Insbesondere die individuelle Darstellung an dem leeren Zahlenstrahl ermöglicht es, auf die Rechenprozessen rückzuschließen. Während der Unterricht im Klassenverband mit der Lehrerin bzw. dem Lehrer als zentrale Instanz der Wissensvermittlung wenig Möglichkeiten freilässt, die Denkprozesse der Schüler zu beobachten, gibt es in offenen Unterrichtsformen und Phasen der Gruppen- oder Einzelarbeit hinlänglich Gelegenheit, einzelne Schüler intensiv und über einen längeren Zeitraum kontinuierlich wahrzunehmen. Offene Unterrichtsformen und soziales Lernen gewährleisten auch, dass die Kontrolle über die Richtigkeit von Lösungen und die Angemessenheit von Lösungsstrategien durch die Kinder selbst erfolgt. Damit wird langfristig eine Selbststeuerung durch die Schüler angestrebt, die Kontrolle von außen hingegen auf ein Minimum reduziert.

Die Beherrschung von Zahlensätzen und von automatisierten Wissenselementen kann erst am Ende eines Lernprozesses stehen. Zwar wird man nicht umhin können, auch diese Lernziele zu erfassen, allerdings ist dies im Rahmen des Schnellrechnens leichter möglich als über Tests.
Der Mathematikunterricht zielt darauf ab, Lösungsstrategien zu etablieren. Eine Entscheidung über eine angemessene Lösungsstrategie setzt allerdings voraus, dass der Schüler verschiedene Strategien durchführen kann. Aus diesem Grunde haben wir im Anhang des Lehrerhandbuches Musteraufgaben angeführt, die das Strategieverständnis der Schüler erfassen könnten. Sie können bei Bedarf als Kopiervorlagen verwendet werden.
[nach oben]

Die Arbeitsmittel des Mathematikus
Holzwürfel
Für das Lehrwerk sind als zusätzliche Arbeitsmaterialien lediglich Holzwürfel (Kantenlänge 2cm) vorgesehen und empfohlen. Diese stellen die konkreten Materialien dar, mit denen die arithmetischen Operationen und die Zahlzerlegungen durchgeführt werden können. Mit ihnen lassen sich auch die realen Situationen, mit denen ein Inhalt eingeführt wird, nachspielen und -bauen. Darüber hinaus finden die Würfel Verwendung bei geometrischen Inhalten, etwa Würfelbauten, Nachbauen bei verdeckten Figuren, Spiegelungen etc.
In den höheren Klassen werden die Würfel im arithmetischen Bereich, so etwa bei der Zehnerbündelung im hunderter Raum benötigt so wie in der Geometrie. Die Würfel sind an vier Seiten farblos, auf den beiden anderen Seiten sind sie rot bzw. blau. Dies gestattet eine günstige Handhabung bei der Zahlzerlegung und der Addition bzw. Subtraktion durch Drehen der Würfel. Die Größe der Würfel ist auf die feinmotorische Fähigkeit der Schüler der Eingangsklasse abgestimmt.
Da die finanzielle Situation der meisten Schulen sehr angespannt ist, wurde darauf verzichtet, zusätzliche Materialien mit dem Lehrwerk anzubieten, insbesondere solche, die nur für einen begrenzten oder gar punktuellen Einsatz vorgesehen sind. Die Würfel können hingegen auch in den höheren Klassenstufen eingesetzt werden. So dienen sie in der Geometrie zur Einführung von Flächen und Volumen und dem Nachbauen von Körpern, der Perspektive (Nachbauen von Würfelfiguren) und der Förderung allgemein visueller Fähigkeiten (Raum-Lage-Beziehung, Orientierung etc.).
Der Kauf der Würfel wird empfohlen, er ist aber für das Lehrwerk nicht verbindlich. Stattdessen können auch andere, bereits in der Schule vorhandene Materialien verwendet werden, etwa die Perlenkette, Mehr-System-Blöcke, Zwanzigerrahmen o.ä. Allerdings sind die Darstellungen im Mathematikus auf die Würfel abgestimmt.
Auf der Rückseite des Schulbuches ist ein Zwanziger-Feld zu finden, auf das die Würfel gelegt werden können. Das Zwanziger-Feld besteht aus zwei Zehnerreihen mit einer Fünfer-Zäsur. Bei der Arbeit mit den Würfeln ist es den Schülern allerdings freigestellt, auch eine lineare Zwanzigerreihe zu bilden.
Es wird empfohlen, die Würfel in der Schule zu belassen. Ein Transport nach Hause ist auf Grund des Volumens der Würfel nicht angezeigt. Dies muss allerdings von Kind zu Kind und seinen individuellen Bedürfnissen jeweils entschieden werden. Es besteht auch die Möglichkeit, durch einen doppelten Satz der Würfel eine Zwanziger-Packung für die Schule und eine für Zuhause vorzusehen.
Die Größe der Würfel erlaubt es auch, sie als Demonstrationsobjekte in der Klasse zu verwenden. Sind ausreichende finanzielle Möglichkeiten vorhanden, dann kann aus einer Magnetfolie, die in verschiedenen Farben erhältlich ist, ein entsprechender Tafelsatz erstellt werden. Günstig wären dann Quadrate der Seitenlänge 5 cm, damit die Zwanzigerreihe genau auf der ein Meter breiten Magnettafel Platz findet. Darüber hinaus können auch Quadrate anderer Größen erstellt werden, die dann bei der Übertragung auf einen variablen leeren Zahlenstrahl Verwendung finden.
Die Würfel stellen den Mengenaspekt (Kardinalzahl-Aspekt) der Zahlen dar. Sie werden schon frühzeitig mit dem zweiten Arbeitsmittel, dem "leeren Zahlenstrahl", in Verbindung gebracht.
Der "leere Zahlenstrahl"
Hierbei handelt es sich nicht um ein Arbeitsmittel, das mitgeliefert werden muss. Ein leerer Strich stellt sicherlich das billigste Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht dar. Während der Mengenaspekt sich für die Einführung von Zahlzerlegungen, Zahlbeziehungen und der arithmetischen Operationen eignet, spielt er später im Denken der Kinder und Erwachsenen nur eine untergeordnete Rolle. Zahlen werden in der Vorstellung vornehmlich als Beziehungen gedacht: 5 ist die Hälfte von 10, 14 das Doppelte von 7 und 1 weniger als 15 usw. In dem Lehrwerk wird daher versucht, schon frühzeitig den Längen- bzw. Maßzahlaspekt mit zu thematisieren und im Denken der Schüler zu verankern. Hierbei

spielen Erfahrungen wie Abschreiten und Messen eine wesentliche Rolle, aber ebenso das Herstellen von Zahlbeziehungen (Halbieren, Verdoppeln, Nachbarschaften usf.). Insbesondere wird Wert darauf gelegt, dass die Kinder die Erfahrung machen bzw. selbst konstruieren, dass sich Zahlbeziehungen nicht ändern, wenn der Maßstab vergrößert oder verkleinert wird. Die 2 bleibt immer die Hälfte von 4, unabhängig davon, wie groß das Maß für 4 ist.
Der "leere Zahlenstrahl" wird auch deshalb so früh eingeführt, weil er für die nachfolgenden Schulklassen von eminenter Bedeutung sein wird. An ihm lassen sich die unterschiedlichen Rechenstrategien verdeutlichen, so dass der Zahlenstrahl als Kommunikationsmedium für die Klassendiskussion dient. Wird der "leere Zahlenstrahl" als Demonstrationsobjekt in der Klasse verwendet, dann sollten lediglich Markierungen bei der Null, Fünf, Zehn, Fünfzehn und Zwanzig vorgegeben sein bzw. am Ende des Schuljahres nur die Null und die Zwanzig markiert werden. Andere Zahlmarkierungen sollten von den Schülern selbsttätig gemacht werden. Bei der Verwendung eines herkömmlichen Zahlenstrahles besteht die Gefahr, dass Schüler die Striche abzählend verwenden, um so zur Lösung arithmetischer Aufgaben zu gelangen. Da es ein Anliegen des Schulwerkes ist, langfristig das Zählen als Lösungsstrategie durch kraftvollere Verfahren abzulösen, werden Zählmöglichkeiten zwar angeboten, aber nur in geringem Umfang. Der "leere Zahlenstrahl" ermöglicht dem Schüler hingegen schon frühzeitig die Entwicklung verkürzender und damit starker Strategien.
Das Zählen sollte als Rechenstrategie während einer Duchgangsperiode durchaus ernst genommen werden, da es sich um eine Phase der kindlichen Entwicklung handelt, die kein Kind überspringen kann. Am Ende des ersten Schuljahres, spätestens Mitte des zweiten Schuljahres sollten kraftvollere Strategien den Platz des Zählens eingenommen haben, da dies sonst zu persistieren droht und sich zum alleinigen Rechenverfahren verfestigt und weit bis in die Sekundarstufe hinein weiter verwendet wird.
Bei der Verwendung des Zahlenstrahles sollte darauf geachtet werden, dass er über die Zwanzig hinausgeht, also nicht abgeschlossen ist, wie etwa auf dem Lineal. Es wird sicher einige Schüler geben, die den Zahlenstrahl von sich aus verlängern, um in größere Zahlräume vorzustoßen.
[nach oben]

Anzeichen von Lernschwierigkeiten
Ziel der Klasse 1 ist es, dass der Zahlenraum bis 20 in seiner Struktur erfasst und die Zahlensätze (Addition und Subtraktion mit Zehnerübergang) ansatzweise automatisiert sind. Darüber hinaus sollten multiplikative Zusammenhänge erkannt und genutzt und für die Addition und Subtraktion verschiedene Strategien zur Verfügung stehen.
Allerdings ist bereits bei Schuleintritt die Entwicklungsspanne zwischen den Kindern deutlich und beträgt bis zu fünf Entwicklungsjahren. Dies macht die Schwierigkeit des Anfangsunterrichts selbst bei altershomogenen Klassen aus. Jeder Mathematikunterricht muss dies berücksichtigen und wird die Kluft zwischen den sehr leistungsstarken und den leistungsschwächeren Kindern nicht ausgleichen können. Es ist zudem fraglich, ob er dies sollte, da auch die leistungsstarken Kinder einer individuellen Förderung bedürfen. Die Schere zwischen den Leistungsgruppen kann somit noch weiter aufgehen.
Die Rechenfähigkeit ist somit auch zu Beginn und im Verlauf der Klasse 2 unterschiedlich ausgeprägt. Besonderes Augenmerk verdienen die Kinder, die zu Beginn beziehungsweise in der ersten Hälfte des zweiten Schuljahres noch zählende Rechner sind. Zwar versucht der Mathematikus dem zählenden Rechnen entgegen zu wirken, kann aber letztlich nicht verhindern, dass einige Kinder bei dieser gewohnten und durchaus bewährten Strategie verbleiben, sei es aus Unsicherheit, sei es, dass kraftvollere Strategien als (geistig) zu aufwendig angesehen werden. Dass das Zählen in Klasse 2 (und schon gar nicht mehr in Klasse 3) keine approbate Strategie darstellt, ist diesen Schülerinnen und Schülern jetzt noch nicht einsichtig.
Allerdings können können verschiedene kognitive Faktoren den mathematischen Lernprozess erschweren. Diese zu entdecken und mittels geeigneter Fördermaßnahmen anzugehen, ist die diagnostische Aufgabe der Lehrerin beziehungsweise des Lehrers. Hierzu bietet der Mathematikus zu jeder Seite Hinweise, welche inhaltlichen Schwierigkeiten auftreten können, welche Verursachungsfaktoren auf Seiten des Kindes vorhanden sein können und wie dem begegnet werden kann. Vordringlich ist aber auch hiers die Beobachtung, das Bemerken von Lernschwierigkeiten, nicht das sofortige Eingreifen und Instruieren. Die Hinweise auf Lernstörungen, seien sie vorübergehender oder länger andauernder Art, sollten registriert und zu einem Gesamtbild der Schülerpersönlichkeit zusammen gesetzt werden. Die im Mathematikus aufgeführten Förderungen haben Vorschlagscharakter.

[nach oben]

Das Schulwerk Mathematikus im altersheterogenen und klassenübergreifenden Anfangsunterricht (flexible Eingangsstufe)

Die in einigen Bundesländern neu gestaltete Eingangsstufe stellt erhöhte Anforderungen an die Lehrerin beziehungsweise den Lehrer. Die Klassen sind aufgrund des flexibelen Einschulungsdatums altersmäßig heterogen und die Lernvoraussetzungen innerhalb der Lerngemeinschaft sehr unterschiedlich. Während die verschiedenen Vorkenntnisse der Kinder in anderen Fächern durch ein entsprechendes Lernangebot noch hinreichend kompensiert und unterschiedliches Lerntempo aufgefangen werden können, ergeben sich im Mathematikunterricht erfahrungsgemäß die größten Schwierigkeiten. Der hierarchisch aufgebaute Lernstoff sperrt sich gegen eine Homogenisierung in altersgemischten Gruppen.

Der Mathematikus kann in solchen Klassen aufgrund seines Differenzierungsangebots und seines Spiralcurriculums dem entgegenwirken. So werden nicht einzelne Inhalte hintereinander und jeweils abschließend behandelt (dies erscheint prinzipiell unmöglich), sondern die Kernideen werden fortwährend wieder aufgenommen und auf einer höheren Ebene neu thematisiert.

Dies gibt die Möglichkeit, an einem Thema unter verschiedenen Perspektiven zu arbeiten, auf unterschiedlichem Niveau die Inhalte anzugehen und gleichzeitig in leistungsgemischten Gruppen von einander zu lernen. Einige Beispiele sollen verdeutlichen, wie innerhalb des Schulbuches und im Übungsteil in den ersten beiden Schuljahren gleiche Themen wiederholt behandelt werden, jeweils natürlich auf einer neuen, erweiterten Stufe.

[nach oben]