Sandra Blanck / Klaus-Peter Eichler

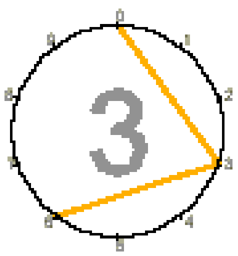
Die Verbindung von Arithmetik und Geometrie - Chance für einen kindorientierten Unterricht

Überlegungen zum Verhältnis von Arithmetik und Geometrie im Mathematikunterricht sind nicht neu. In der Literatur sind sowohl Argumente für „Geowochen“, d. h. die Behandlung geometrischer Inhalte innerhalb eines zusammenhängenden Zeitraumes im Schuljahr, als auch Begründungen für die zeitlich parallele Behandlung von arithmetischen und geometrischen Inhalten zu finden.

Unseres Erachtens richten sich diese Überlegungen zu oft nur auf die äußere Form, auf organisatorische Fragen und noch zu wenig auf die inhaltliche Verbindung beider Bereiche. Beziehungen zwischen Arithmetik und Geometrie werden dementsprechend zu oft auf Themen wie Zeichnen-Messen-Rechnen und eine eher äußerliche Verbindung der Bereiche reduziert.

Aus historischer Sicht ist die Geometrie die Mutter der Mathematik.
Ein solcher Status ist in der Primarstufe insofern anstrebenswert, als er handlungsorientiertes Arbeiten mit sich bringt und den Kindern so altersgerechtes Aneignen ermöglicht. Dabei geht es nicht um ein „Nebeneinander“ von Arithmetik und Geometrie, sondern um die inhaltliche Verbindung, ein Miteinander und vor allem aufeinander aufbauen:

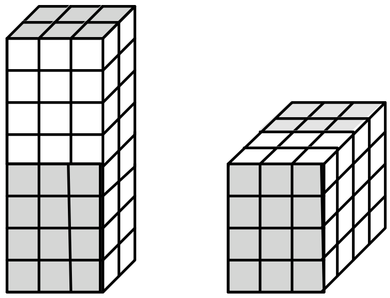
- geometrische Betrachtungen liefern oft einen wesentlichen Anschauungshintergrund oder sind gar überhaupt erst der Anlaß zu arithmetischen Aktivitäten.
  Das trifft im Unterricht beispielsweise dann zu, wenn geometrische Zusammenhänge entdeckt wurden und die Kinder dafür eine Erklärung suchen. Warum beispielsweise sieht die „Blume der 3“ genau so aus, wie die Blume der 7?



- Umgekehrt können die Kinder arithmetisch entdeckte Beziehungen vertiefend geometrisch veranschaulichen. So erhalten diese Beziehungen für die Kinder nicht nur Bedeutung in einer anderen Ebene, sondern werden oft überhaupt erst einsichtig.

  Viele Kinder kennen beispielsweise das gegensinnige Verändern beim Multiplizieren von vielen Rechenbeispielen. Sie akzeptieren es als gültig, vermögen aber in den seltensten Fällen zu erklären, warum das so ist.

Hier werden solche Beziehungen veranschaulicht:



3 • 2 • 8 = 48
oder 6 • 8 = 48

3 • 4 • 4 = 48
12 • 4 = 48

Die Aneignung arithmetischer Inhalte verlangt vom Kind neben Abstraktions- auch erhebliche Vorstellungsleistungen. Gefordert sind insbesondere:
- die Vorstellung von Objekten
  z.B. als Repräsentanten von Zahlen
- die Vorstellung von Prozessen
  z.B. als Repräsentanten von Rechenoperationen

Vorstellungsleistungen sind nicht ohne vorherige Wahrnehmungen möglich. Dabei muß das Vorzustellende durchaus nicht in genau dieser Weise vorher wahrgenommen worden sein. Vielmehr kommt es auf die Wahrnehmung von typischen Objekten oder Prozessen an, die die wesentlichen Eigenschaften besitzen. Auf dieser Basis ist Vorstellen ein aktiver Prozeß der Rekonstruktion, der Neukonstuktion. [1]

Unterricht wird in diesem Sinne nicht dadurch anschaulich, weil *genau* die in den Sachverhalten benutzten Dinge vorhanden sind, sondern weil die Kinder grundlegende Erfahrungen besitzen, prinzipielle *Mittel und Methoden des Veranschaulichens kennen* und ebenso wie ihre produktive Phantasie *nutzen*.
Für ein lernendes Kind können beispielsweise Holzwürfel in der einen Situation Bausteine, in einer anderen Situation Goldstücke zum Bezahlen und eine Stunde später Pflaumen, Äpfel usw. verkörpern.

Die Nutzung räumlicher Objekte und Prozesse zur Veranschaulichung von Zahlen, Zahlbeziehungen und Operationen ermöglicht in hervorragender Einheit
- das Veranschaulichen arithmetischer Sachverhalte und zugleich
- die kontinuierliche Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens der Kinder

Der hohe Stellenwert des räumlichen Vorstellungsvermögens als einer Basiskomponente der Intelligenz[2] für die Bewältigung schulischer wie außerschulischer Leistungsanforderungen ist unumstritten.
Mehrere Untersuchungen (z.B. THIESEMANN) zeigen, daß das räumliche Vorstellungsvermögen gezielt entwickelt werden kann. Bemerkenswert ist dabei, daß das jüngere Schulalter *ein* Lebensabschnitt des Kindes ist, in dem in besonderem Maße Fortschritte *möglich* sind.

Entsprechend sinnvoll ist die Forderung nach einer gezielten Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Dazu benötigen die Kinder die Gelegenheit zur Auseinandersetzung mit räumlich-geometrischen Problemen, die Möglichkeit, räumliche Sachverhalte wahrzunehmen und Anlässe zu entsprechenden Vorstellungen.

Angesichts oft existierender Stoff-Zeit-Probleme ist es unmöglich, einen eigenständigen Übungsteil zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens zu etablieren. Das ist u. E. auch nicht notwendig, wenn all jene Möglichkeiten, die sich ohnehin im Unterricht dazu anbieten, entsprechend genutzt werden.

An vielen Stellen können die oft als Veranschaulichungsmittel genutzten Plättchen aller Art durch Würfel ersetzt werden.
Würfel ermöglichen nicht nur die Aneignung des Zahlbegriffs hinsichtlich Anzahl und Maßzahl (Länge, Fläche, Volumen), sondern auch das Sammeln räumlicher Erfahrungen beim Veranschaulichen.

Die nachfolgend dargestellten Aufgaben sind geeignet, die Vorstellungsleistung der Kinder bezüglich ausgewählter Objekte und Prozesse zu fördern. Dabei werden arithmetische und geometrische Kompetenzen in Einheit gefördert.

WÜRFELBAUTEN in den Klassen 1 und 2

Räumliche Erfahrungen werden zur Auswertung zweidimensionaler Würfeldarstellungen benötigt. Die wesentliche Leistung besteht in der gedanklichen Produktion des dreidimensionalen Würfelbauwerks ausgehend von der ebenen Darstellung.
Die Kinder benötigen immer wieder die Gelegenheit zum Bauen, um

- die Einheit von ebener Darstellung und realem Bauwerk zu erleben,
- die Kluft zwischen ebener Darstellung und eigener Vorstellung der räumlichen Wirklichkeit zu überwinden und nicht zuletzt
- eine Kontrollmöglichkeit zu erfahren.

Die Analyse realer dreidimensionaler Bauwerke und ihres Aufbaus, das Umordnen von Würfeln usw. ermöglichen den Kindern Wahrnehmungen von Prozessen und Resultaten, die Voraussetzungen für Vorstellungen sind.
Kindern, die hier keine Vorstellungen haben, helfen Erklärungen wenig. Sie benötigen vielmehr Zeit zum Probieren und Wahrnehmen.

Konkret für die Arbeit im Unterricht bedeutet das, dass die Schüler zunächst z. B. Holzwürfel verwenden, um sich das eben dargestellte WÜRFELGEBÄUDE zu veranschaulichen:
„Baue dieses WÜRFELGEBÄUDE und sage, wie viele Würfel du dafür brauchst!“
Hier wird zunächst die Tätigkeit der Kinder, das Hantieren und Ausprobieren mit den Holzwürfeln, an die erste Stelle gesetzt. Dieses teils spielerische Herangehen bringt *Spaß* am Arbeiten, knüpft an Vorerfahrungen an und vertieft sie. Das begünstigt den Lernerfolg und motiviert für weitere Aufgaben.

Im Mittelpunkt steht dabei nicht nur ein äußeres Handeln mit dreidimensionalen Objekten, sondern mindestens ebenso die Fähigkeit, „Bilder zu lesen“, d.h. zweidimensionale Darstellungen auszuwerten.

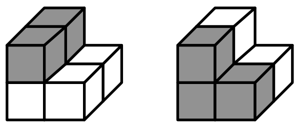
Schwieriger ist es, die Anzahl der Würfel allein an der Abbildung zu bestimmen, und erst danach zu bauen. Auf diese Weise können die Kinder nachträglich ihre Ergebnisse parallel zur ebenen Darstellung überprüfen.
Wenn die Kinder mit den Würfeln zwanglos probieren und bereits gefundene Lösungen selbst kontrollieren, gegebenenfalls auch korrigieren können, vervollkommnen sie gewissermaßen interaktiv die Fähigkeit zur Vorstellung immer komplexerer Bauwerke.

Notieren die Kinder *vor* dem Bauen zunächst die Anzahl der benötigten Würfel, ist die Leistung insofern höher, als sie sich anhand der zweidimensionalen Darstellung räumliche Objekte und Lagebeziehungen sowie eventuell (falls die Kinder ein Bauwerk gedanklich umordnen) auch schon räumliche Prozesse vorstellen.

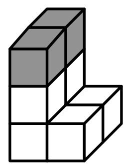
Interessant und eine klassenöffentliche Diskussion wert ist die Art und Weise, wie die Kinder die Anzahl der verwendeten Würfel bestimmen, worauf sie achten:

- Ist es günstig, jeden Würfel einzeln zu zählen?
- Wie vergesse ich die verdeckten Würfel nicht?
- Wie vermeide ich, einen Würfel doppelt zu zählen?
- Zählt man besser „ebenenweise“ oder „scheibenweise“?
- Gibt es noch andere Möglichkeiten, wie etwa das Erkennen bereits bekannter Teile im neuen Bauwerk oder das Rechnen?

Beispiele:



4 + 2 oder 3 + 3?

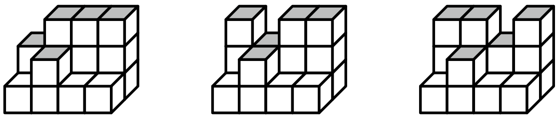


6 + 2 oder 4 + 4?

In der Arbeit lernen die Kinder nicht nur verschiedene Lösungsideen zu akzeptieren, sondern sie erfahren auch deren unterschiedliche Brauchbarkeit für verschiedene Bauwerke.

Einer Diskussion wert ist ebenso die Frage, ob jedes Würfelbauwerk „von Grund auf neu“ gebaut werden muß oder ob es vielleicht schon durch eine geringe Veränderung des vorherigen Bauwerks hergestellt werden kann.
Wer sieht die Veränderung?

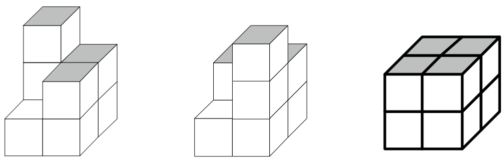
Beispiel:



Das Suchen und Sehen der Veränderung von Bauwerk zu Bauwerk regt die Kinder zur Vorstellung von räumlichen Prozessen an: Wer kann mit möglichst wenigen Umordnungen aus einem bestehenden Bauwerk das nächste erhalten?

Den Vergleich der Bauwerke und das gedankliche Umordnen erleben die Kinder dort als nützlich, wo sie so schneller auf die Anzahl der verwendeten Würfel schließen können.
Kinder erkennen rasch: Müssen lediglich Würfel umgeordnet werden, um von einem Bauwerk zum anderen zu kommen, haben beide die gleiche Anzahl Würfel.

B1 B2 B3



Sabine (8 Jahre) bestimmte vor dem Bauen die Anzahl der Würfel bei B1 mit acht und für B2 mit sieben. Sie hat B1 nachgebaut:

Interv.: Und zählst du jetzt noch mal nach, bitte?
Sabine: *(zählt die Würfel einzeln und unsystematisch)* Acht.
Interv.: Kannst du die Würfel auch anders hinlegen, so dass man gleich sieht, wie viele es sind?
Sabine: *(zerstört B1 völlig und baut B3)*
Interv.: *(zeigt, wie mit einem Zug aus B1 B3 entsteht)*
Sabine: (spontan) Und denn wieder so raus. (*stellt den Würfel wieder in die Ausgangssituation – B1*)
Interv.: Hast du das vorher gar nicht gesehen?
Sabine: Neh, da hab´ ich gar nicht drauf geachtet.
Interv.: Ja, so kann man das schneller zählen.
Sabine: **Und da ist es hier genau das gleiche, wenn man den hier runtersetzt.** *(zeigt auf **B2** und setzt den einzelnen Würfel in die Lücke)*
Interv.: Wieviel sind´s denn da?
Sabine: Sieben.
Interv.: Du hast gesagt, du setzt hier einen runter *(deutet auf den Einzelwürfel in B2*). Wie viele sind es dann?
Sabine: Acht.
Interv.: Gut. Klasse. Das wird auch so´n Paket.
Sabine: **Also ist die sieben jetzt ... ... falsch?** *(zögernd, deutet auf ihre anfangs angegebene Anzahl)*

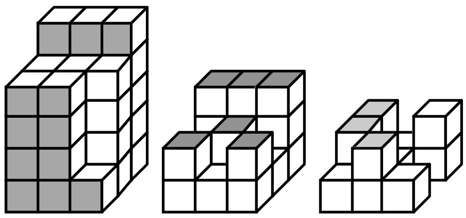
Der geschilderte Dialog einschließlich des vorhergehenden Bauens dauerte weniger als vier Minuten!
Angesichts der provozierten Lernfortschritte meinen wir, dass diese Zeit auch innerhalb des Unterrichts im Klassenverband dem lernenden Kind zustehen sollte und kann. Dabei müssen die Impulse nicht unbedingt vom Lehrer gegeben werden. Kinder tauschen sich gerade bei geometrischen Aktivitäten aus, zeigen einander, was sie sehen usw. …

Zunächst können die Kinder nahezu parallel zur bildlichen Darstellung der Würfelbauwerke das Umordnen mit realen Würfeln vollziehen. Werden anfangs nur einzelne Würfel umgeordnet, sind es schon bald kleinere Teilfiguren aus mehreren einzelnen Würfeln.
Später erfolgt die konkrete Handlung als Kontrolle erst nach dem gedanklichen Umordnen und der Entscheidung über die Anzahl. Individuell verschieden benötigen die Kinder das Bauen zumindest zur Kontrolle in dieser Form mehr oder weniger lange.

Umordnen und Rechnen

Als besondere Idee zur schnelleren Ermittlung der Würfelanzahl wird beim Umordnen das Herstellen einer kompakteren Form entdeckt. Hier können dann beispielsweise Addition und Multiplikation zur schnelleren **Berechnung** der Würfelanzahl genutzt werden.
In der Tätigkeit erleben die Kinder sowohl die Umordenstrategien als auch das Berechnen als effektiv und damit nützlich.
So werden zugleich die Rechenoperationen abermals sinnvoll veranschaulicht.

Beispiel:



3 • 3 • 4 | 9 + 6 + 3 oder 6 • 3 oder 9 + 9 | 9 + 3 oder 4 • 3

Aufgaben zu den Würfelgebäuden können entsprechend der differenzierten räumlichen Kompetenzen der Kinder mit verschiedenem Schwierigkeitsgrad gestellt werden.
Der Schwierigkeitsgrad[3] resultiert dabei *zum einen* aus dem Würfelgebäude selbst.
Wesentliche Kriterien sind hier:

- **Die Komplexität des vorzustellenden Objektes**:
  - Anzahl der verwendeten Würfel
  - Anzahl der Ebenen horizontal, vertikal und vor allem sagittal
  - Anzahl und Lage verdeckter Würfel
  - Überschneidungen von Würfeln

- **Die Komplexität des vorzustellenden Prozesses**
  Wie viele Zerlegungen oder Umordnungen sind erforderlich, um ein Würfelgebäude zu erhalten, bei dem die Anzahl der Würfel leichter aufgefaßt werden kann?
  Welcher Art sind die Bewegungen? (Verschiebung oder auch Drehung um eine oder mehrere Achsen)

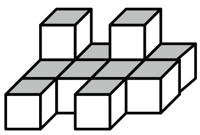
Zum anderen resultiert der Schwierigkeitsgrad aus der Art und Weise der Bearbeitung der Aufgaben durch das Kind. Insbesondere spielt eine Rolle, ob und in welcher Form Material zum Bauen genutzt werden kann und inwieweit das Kind mit diesem Material bereits vertraut ist.

Strukturierungen und Strategien

Das Umordnen kann wesentlich durch die bildliche Darstellung angeregt werden. So ist es günstig, den Kindern zunächst Aufgaben mit Anregungen zur Strukturierung zu geben. Graue Markierungen einiger Würfeloberflächen im Bauwerk assoziieren Handlungen und regen nach unserer Erfahrung in hohem Maße zum Umordnen an. Dabei sind verschiedene Gedanken möglich und notwendig:

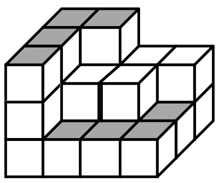
Nach dem Umordnen sind alle markierten Flächen auf der gleichen Seite des Bauwerks zu finden:

Beispiel:



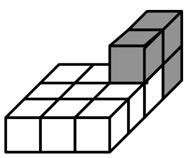
Ebenso ist vorstellbar, dass markierte Teile, gerade so als seien sie mit Leim eingestrichen, aufeinandergelegt werden können.

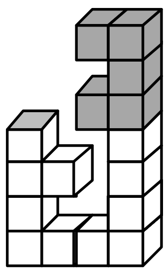
Beispiel:



Auch Teilformen, die ebenso wie der Rest des Gebäudes gut erfaßbar sind, können farblich hervorgehoben werden und so die Analyse des Bauwerkes erleichtern.

Beispiel:





Links ist sofort der Neunerblock zu erkennen, an den ein Dreier angefügt ist. Das rechte Würfelgebäude kann nach dem Schlüssel-Schloß-Prinzip in einen Sechzehner umgewandelt werden.

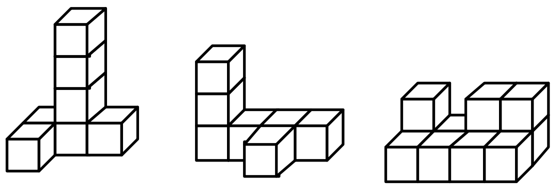
Wesentlich ist, dass die Kinder beim Arbeiten mit diesen Aufgaben kein immer wieder anzuwendendes „Rezept“ zur Lösung vorfinden. Die Markierungen sind variabel, dem jeweiligen Würfelgebäude angepasst und zeigen dem Kind Möglichkeiten, sich in das Bauwerk *„hineinzusehen“*.

Dementsprechend sollten Kinder auch angeregt werden, ungefärbt abgebildete Würfelgebäude so zu markieren, wie sie sie umordnen würden: „Schraffiere einige Flächen so, dass deine Freunde schnell erkennen, wie viele Würfel es sind.“

Generell hat das Umordnen für das Kind nur dann einen Sinn, wenn es eine Erleichterung für die Anzahlerfassung bringt. Bauwerke mit weniger als 6 Würfeln sollten dementsprechend nur anfangs, in der Phase des Kennenlernens des Materials eingesetzt werden.[4]

Die Kinder sollten auch WÜRFELBAUTEN erleben, bei denen das Umordnen nicht lohnenswert ist. Diese WÜRFELBAUTEN können selbst mit zwei oder drei Umordnungen nicht in ein kompaktes überschaubares Gebäude umgewandelt werden.

Beispiel:



Der Einsatz derartiger WÜRFELBAUTEN, verhindert, daß die Kinder allzu schnell ein bestimmtes Lösungsmuster anwenden, ohne sich kritisch mit dem einzelnen Bauwerk auseinanderzusetzen. Die Frage: „Lohnt sich hier ein Umordnen?“ sollten sich Kinder gewohnheitsmäßig bei jeder Aufgabe stellen.

Die Abbildungen auf den beigefügten Arbeitsblättern geben in diesem Sinne nicht einen oder gar *den* Weg vor. Meist gibt es mehrere Möglichkeiten, geschickt umzuordnen oder gedanklich zu zerlegen. Jedes Kind kann seinen eigenen Weg finden und gehen.
Haben die Kinder anschließend die Möglichkeit, sich über ihre Strategien auszutauschen, wird Lernen voneinander möglich und aus der Sache heraus notwendig. Den Lösungsweg des Anderen verstehen heißt, sich auf dessen Strategie näher einzulassen. In diesem Sinne sind bereits während des Lösens der Aufgaben kooperative Lernformen günstig.

Hinweise zur Arbeit mit dem Material

Die Aufgaben wurden mit Kindern der Klassen 1 und 2 bearbeitet. Weil wir uns nicht nur einseitig für die Ergebnisse, sondern vor allem für die Lösungsstrategien der Kinder interessierten, führten wir mit Kindern der Klasse 2 Einzelinterviews. Hier gaben uns die Kinder Auskunft über ihre Lösungswege.

Generell auffällig war, dass sich Kinder dieses Alters offensichtlich in einer für diese Art von Aufgaben sensiblen Phase befinden:
Einige Kinder waren bereits sehr sicher im Umgang mit den WÜRFELBAUTEN. Andere Kinder wiederum waren wegen des offensichtlich ungewohnten Materials zwar anfänglich unsicher, bereits im Prozeß der Bearbeitung relativ weniger Aufgaben deutlich souveräner. Ihnen wurden selbst in kurzer Zeit bei der Bearbeitung weniger Aufgaben erste, aber wesentliche Einsichten und Erfolge möglich.

Die anfängliche Unsicherheit ist zum großen Teil mit fehlender Primärerfahrung der Kinder zu erklären. Auffällig war bei einigen Kindern ein behutsames, übervorsichtiges und teilweise auch ängstliches Hantieren mit den Würfeln:

Anne (7Jahre) hatte die Würfelanzahl der einzelnen Bauwerke bestimmt ... (auf dem Tisch lagen große rote Würfel)

Interv.: Bau´s doch mal!
Anne: Bauen? *(fragender Blick)*
Interv.: Bau´s mal!
Anne: Worauf, hierunter? (*zeigt auf das Aufgabenblatt unter das zu bauende Würfelgebäude)*
Interv.: Bauen, richtig bauen, mit großen Würfeln.

Erst jetzt beginnt Anne zaghaft, als seien sie zerbrechlich, die Würfel zu benutzen und zu stapeln. Sie lernt in Klasse 2 und hat offensichtlich bis zu diesem Zeitpunkt keinerlei Bauerfahrung.

Angesichts der von uns in den Interviews konstatierten fehlenden Primärerfahrungen ist es unseres Erachtens um so gebotener, für die Erarbeitung und Festigung von Rechenoperationen oder auch beim Arbeiten an der Kleinerrelation in Klasse 1 verstärkt auf räumliche Objekte zurückzugreifen, die ein Strukturieren ermöglichen.
Für die Phase des Probierens auf diesem Weg wünschen wir dem Leser Geduld, Neugier auf die Wege und Sichtweisen der Schüler und nicht zuletzt Freude über deren Lernfortschritte.

1 Vgl. hierzu Piaget, J; Inhelder, B et al.: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. - Stuttgart: Klett, 1971

Lorenz, J.H: Veranschaulichungsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht. - In: Mathematik und Anschauung. – Köln: Aulis 1993 (IDM Bd.18)

2 Als Basiskomponenten der Intelligenz (häufig auch Primärfaktoren der Intelligenz genannt) wurden die Auffassungsgeschwindigkeit, die Raumvorstellung, das logische Denken, das rechnerische Denken, die Merkfähigkeit, das Wortverständnis und die Wortflüssigkeit faktoranalytisch ermittelt. THURSTONE (1938) nennt in diesem Zusammenhang verbal comprehension, word fluency, numerial facility, perceptual speed, memory, reasoning und spatial abilities als die Primärfaktoren der Intelligenz.
Thurstone, L. L.: Primary mental abilities. - Chicago, 1938

3 Der Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe ist immer bezogen auf den Bearbeiter der Aufgabe zu sehen. In unseren Untersuchungen mit Kindern nach dem ersten Halbjahr der Klasse 2 wurden insbesondere Überschneidungen und Verdeckungen als schwierigkeitsbestimmend deutlich.

4 Manche Kinder bestimmen auch bei WÜRFELBAUTEN mit deutlich mehr als 6 Würfeln die Anzahl schneller zählend, als durch Umordnen. Hier ist ein individualisierendes Arbeiten angezeigt.

LITERATUR

Besuden, H.: Knoten, Würfel, Ornamente - Aufsätze zur Geometrie in Grund- und Hauptschule. - Stuttgart: Klett, 1984
Bloom, B. S: Stabilität und Veränderung menschlicher Merkmale. - Weinheim, Berlin und Basel: Beltz, 1971
Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe (Band 2). - Stuttgart: Klett, 1973
Frostig, M. et al.: Visuelle Wahrnehmung. - Hannover: Schroedel, 1974
Ilgner, K.: Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens der Schüler in Klasse 3. - Bericht über einen Schulversuch. - In: Wiss. Zeitschr. der Humboldt - Universität zu Berlin. - Math. - Nat. Reihe. - 1983(1). - S. 57 - 69
Lorenz, J. H.: Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht - mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. - Göttingen: Hogrefe, 1992
Maier, P. H.: Räumliches Vorstellungsvermögen - Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen, Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule. Europäische Hochschulschriften, Bd. 493. - Frankfurt a.M.: 1994
Maier, P. H.: Die Trainierbarkeit der Raumvorstellung in der Hauptschule - In: Pädagogische Welt 50(1996)2. - S. 49 - 54
Montessori, M.: Das kreative Kind. - Freiburg, Basel, Wien: 1972
Müller, H.: Aufgaben zur Schulung der Raumanschauung - Ein Ansatz zur Klassifizierung und Niveaustufung. - In: Mathematik in der Schule 33(1995)4. - S. 214 - 221
Neubrand, M.: Räumlich - geometrische Aufgaben als Alternative zum sogenannten Fünf-Minuten-Rechnen. - In: Mathematische Unterrichtspraxis 12(1991)2. - S. 25 - 33
Piaget, J; Inhelder, B et al.: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. - Stuttgart: Klett, 1971
Radatz, H.; Rickmeyer, K.: Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. - Hannover: Schroedel, 1991
Radatz, H; Lorenz, J. H.: Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel, 1993
Rost, D. H. Raumvorstellung - psychologische und pädagogische Aspekte. - Weinheim und Basel: Beltz, 1977
Senftleben, H.-G.: Grundschulkinder lösen kopfgeometrische Aufgaben. - In: Grundschulunterricht 43(1996)1. - S. 24 - 27
Thiesemann, F. H. H.: Zum Training der Raumvorstellungsfähigkeit. - In: Mathematische Unterrichtspraxis 12(1991a)2. - S. 35 - 48
Thiesemann, F. H. H.: Zur Entwicklung ausgewählter Komponenten der Raumanschauungsfähigkeit in später Kindheit und Adoleszenz. - In: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 20, Anschauliche und Experimentelle Mathematik I. - Wien und Stuttgart: 1991
Thurstone, L. L.: Primary mental abilities. - Chicago, 1938
Vester, F.: Denken, Lernen, Vergessen. - München: dtv, 1978
Wertheimer, M.: Produktives Denken. - Frankfurt a.M.: Kramer, 1957
Winter, H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. - Braunschweig: Vieweg, 1989