Fördern mathematisch begabter Kinder und Entwicklung mathematischer Interessen bei allen Kindern

1 Zur Sache

Überlegungen zur Förderung mathematisch begabter Kinder sind keineswegs neu. In den letzten Jahren rückten entsprechende Forderungen stärker in den Mittelpunkt. Ursache waren vor allem einschlägige Untersuchungen wie TIMSS, PISA und VERA, die bis in jüngste Zeit wenig Anlass gaben, mit dem Mathematikunterricht und seinen Ergebnissen zufrieden zu sein. Das betrifft mehrere Aspekte:

Zum einen kann es nicht befriedigen, wenn beispielsweise laut der IGLU Studie (vgl. BOS ET. AL. 2003) am Ende der Klasse 4 fast 20 % der Kinder nur über elementarste mathematische Fähigkeiten verfügten und im Hinblick auf das weitere Lernen im Fach Mathematik als gefährdet eingestuft werden mussten. Unbefriedigend ist auch, dass die Leistungen der besten Kinder in Deutschland immer noch einen beträchtlichen Abstand zu denen der leistungsfähigsten Kinder einiger anderer Länder haben und dass zudem die Anzahl der Kinder, welche die höchste Kompetenzstufe erreichen, immer wieder recht gering ist. So beträgt laut den Ergebnissen von TIMSS 2007 (vgl. BOS ET. AL. 2008) ihr Anteil nur 6%.

Zum anderen betrifft das die von Bundesland zu Bundesland, von Schule zu Schule, ja selbst von Klasse zu Klasse immer wieder anzutreffenden ungerechtfertigten Unterschiede im Niveau des Unterrichts und seiner Ergebnisse.

Aus diesen Befunden kann nicht geschlossen werden, dass nur die leistungsschwächeren sowie die leistungsstarken, begabten Kinder eine bessere Förderung brauchen. Vielmehr bedarf es einer besseren Grundqualität des gesamten Unterrichts ausdrücklich für alle Kinder. Auch die Kinder, die „gute“ bis „befriedigende“ Ergebnisse erreichen, haben ein Recht auf Förderung. Im Interesse der Entwicklung aller Kinder aber auch im gesellschaftlichen Interesse eines Landes, dessen Wirtschaftskraft auf der Verarbeitung und wertsteigernden Veredlung von Erzeugnissen beruht, ist es zwingend erforderlich, allen Kindern eine möglichst gute mathematische Bildung zu ermöglichen.

Dazu muss es in Einheit gelingen, mathematisch begabte Kinder im tagtäglichen Unterricht zu fördern und zugleich mathematische Interessen bei allen Kindern zu wecken und aufrecht zu halten. Nur so kann die Anzahl der Leistungsbesten vergrößert und zugleich das Niveau dieser Besten erhöht werden.

Die Chancen dafür stehen zumindest zu Beginn der Klasse 1 nicht schlecht: Im Rahmen einer Untersuchung zum Niveau der geometrischen Vorerfahrungen von Schulanfängern untersuchten wir 2003 in den letzten 8 Wochen vor Schulanfang ca. 1800 Kinder in den Ballungsräumen Halle (Saale), Hamburg und Rostock. (vgl. EICHLER 2007) Immer wieder äußerten die Kinder zu Beginn der Interviews, wie sehr sie sich auf die Schule freuten. Der unangefochtene Hauptgrund war die Vorfreude auf das Fach Mathematik, auf das Kennenlernen großer Zahlen und das Rechnen mit ihnen. Dass sehr viele dieser Kinder schon in Klasse 3 „ach Mathe“ sagen, hat vor allem eine Ursache: Unzählige Stunden konkreten Mathematikunterrichts.

Nachfolgend sollen einige Hinweise zur Gestaltung eines Unterrichts gegeben werden, der in Einheit mathematisch begabte Kinder fördert und mathematische Interessen bei möglichst allen Kindern weckt und aufrecht hält. Es sollen Anregungen für die unzähligen engagierten Lehrerinnen[1] sein, die tagtäglich darum bemüht sind, differenzierend zu arbeiten und jedem Kind eine optimale Entwicklung zu ermöglichen.

Wenn über den Mathematikunterricht nachgedacht wird, ist die Bestimmung seiner Funktion von zentraler Bedeutung. Diese Antwort ist wegweisend für alle Entscheidungen zur Auswahl von Zielen, Inhalten und von methodischen Möglichkeiten. Sie bestimmt auch Detailentscheidungen, beispielsweise ob und in welchem Umfang Kinder die Verfahren des schriftlichen Rechnens erlernen sollten oder ob und wenn ja mit welcher Intention Taschenrechner im Mathematikunterricht der Grundschule eingesetzt werden sollten.

2 Zur Funktion des Mathematikunterrichts

In der Geschichte findet man unterschiedliche Antworten auf die Frage nach der Intention des Mathematikunterrichts. Es gab Hochkulturen wie die der Maya, in denen nur wenige mathematisch gebildet waren. Adam Ries[2] ist uns nur deshalb als Rechenmeister bekannt, weil zu seiner Zeit nicht jeder schriftlich rechnen konnte, sondern dies die Rechenmeister erledigten. Die Regeln der Bruchrechnung waren noch zu Zeiten von Ries und Melanchton[3] der universitären Bildung vorbehalten.

Auch im heutigen Unterricht findet man durchaus nicht immer die Auffassung, dass alle Kinder mit herausfordernden Problemen konfrontiert werden können. Erst einmal sollten die Kinder sicheres Rechnen (und dort vor allem das Anwenden vorgegebener Algorithmen) erlernen, bevor die eigenständige Auseinandersetzung mit interessanten und anspruchsvolleren mathematischen Inhalten möglich ist. In einem derartigen Unterricht lernen die Kinder dann eine Vielzahl von Aufgabentypen[4] und –formen[5] zu unterscheiden und prägen sich die jeweils passende Lösungsregel ein. So gibt es Kinder, die bei Aufgaben wie 63 – __ = 42 die formal eingeprägte Lösungsregel: „Wenn die zweite Zahl gesucht ist, muss

---

[1] Wenn hier und an anderer Stelle von Lehrerinnen gesprochen wird, mögen sich alle emanzipierten Lehrer ebenso angesprochen fühlen.

[2] (1492 – 1559), bekannt als Rechenmeister. Verfasste u.a. „Rechenung auff der linihen und federn" (1522), in dem er das Rechnen auf dem Rechenbrett und das Rechnen mit Ziffern im Positionssystem beschreibt und die „Coß", ein Lehrbuch der Algebra.

[3] (1497 – 1560), eigentlich Schwartzerdt, war Gelehrter, Dichter, Lehrbuchautor, wurde als „Praeceptor Germaniae" (Lehrer Deutschlands) bekannt. Neben Martin Luther einer der Reformatoren.

[4] Unter Aufgabe im Sinne einer mathematischen Schüleraufgabe verstehen wir eine Aufforderung an das Kind zum Handeln, die es mit seinem mathematischen Wissen und Können lösen oder aber als unlösbar erkennen kann. Hier wird insbesondere das Problem der „Passung" zwischen Anforderungen und subjektiven Voraussetzungen des Kindes deutlich: Was eine Aufgabe ist, hängt vom Löser ab. Der Terminus „Aufgabentyp" widerspiegelt das mathematische Wesen einer Aufgabe. Aufgabentypen sind beispielsweise „Addition zweier zweistelliger Zahlen mit Überschreiten des Zehners"

[5] Der Terminus Aufgabenform widerspiegelt die Erscheinung einer Aufgabe. Aufgabenformen sind beispielsweise Terme, Tabellen, Zahlenmauern, usw.

man minus rechnen". sagen. Sie geben dann folgerichtig bei Aufgaben wie 20 – __ = 50 als Lösung die Zahl 30 an.

Aus unserer Sicht hat die Funktion mathematischer Bildung, unabhängig von der Altersstufe zwei untrennbar miteinander verbundene Seiten (vgl. WEBER 1987):

Einmal befähigen die erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, Gewohnheiten und Einstellungen zur Beantwortung elementarer Fragen aus der Umwelt und aus der Mathematik und schaffen eine tragfähige Basis für erfolgreiches weiteres Lernen nicht nur im Fach Mathematik.

Zugleich besitzen mathematische Aktivitäten wesentliche Potenzen für die harmonische Entwicklung des Kindes. Das betrifft insbesondere

- das Wecken von Neugier und Interesse an mathematischen Tätigkeiten, Objekten und Fragestellungen,
- das Wecken der Freude an mathematischen Aktivitäten speziell und an entdeckendem Lernen generell,
- die Förderung der Fantasie und der Kreativität,
- die Denk-, Gedächtnis- und Sprachentwicklung,
- die Befähigung zu und die Gewöhnung an ausdauernde, konzentrierte Lernarbeit,
- die Erziehung zu Genauigkeit, Sorgfalt und Eigenverantwortung und nicht zuletzt
- die Entwicklung sozialer Verhaltensweisen.

Auch wenn in der Grundschule die Mehrheit der Inhalte eine fundamentschaffende Funktion für erfolgreiches Weiterlernen besitzen: Gegenwärtig gewinnt der Mathematikunterricht seine Existenzberechtigung weniger denn je aus seinen stofflichen Inhalten, sondern vor allem aus den hier genannten Potenzen für die Entwicklung des Kindes. (vgl. FANGHÄNEL 2000) Diese Potenzen des Mathematikunterrichtes kommen allerdings nur dann zur Geltung, wenn die Kinder durch eine entsprechende Gestaltung des Unterrichts zu aktiv handelnden Subjekten ihrer Bildung gemacht werden können. „Wesentlicher als die Frage, *was* denn im Fach Mathematik unterrichtet werden sollte, ist es zu klären, *wie* dies zu geschehen hat". (FANGHÄNEL 2000) Zweifellos sind Fragen nach der Auswahl und Anordnung des Stoffes, nach seiner Systematik und logischen Strenge wichtig, den Vorrang aber müssen Überlegungen haben, wie *alle* Kinder in spezifischer Weise angesprochen und veranlasst werden können, sich geistig aktiv mit den angebotenen Inhalten auseinanderzusetzen (vgl. Fanghänel 2000). Dabei spielt ein geeignetes Arbeiten mit Aufgaben die entscheidende Rolle.

3 Arbeiten mit Aufgaben

Wir sehen in der Tradition von WEBER und FANGHÄNEL ein geeignetes Arbeiten mit Aufgaben als das Hauptmittel zur Sicherung einer auf den Aneignungsgegenstand gerichteten geistigen Tätigkeit und damit zur Realisierung der Ziele des Unterrichts an.

Arbeiten mit Aufgaben als Tätigkeit der Lehrerin umfasst dabei nach FANGHÄNEL (2000)

- die Auswahl und Anordnung der Aufgaben,
- das Stellen der Aufgaben im Unterricht,
- das Ingangsetzen- und Inganghalten der Aufgabenbearbeitung bis hin zur
- Initiierung der Rückbesinnung auf das Resultat und den Lösungsweg.

Aufgaben sind zunächst so auszuwählen, dass sie *prinzipiell allen Kindern* neben der Entwicklung von Fähigkeiten und Fertigkeiten im Rechnen auch Möglichkeiten zu Entdeckungen, Anlässe zum Kommunizieren und Argumentieren bieten. Es ist eine immer wieder anzutreffende unbefriedigende Praxis, dass Kinder ein und derselben Klasse nicht miteinander lernen, sondern völlig verschiedene Aufgabenformate nebeneinander bearbeiten. Dabei ist zu beobachten, dass für leistungsstärkere Kinder meist attraktive Aufgaben bereitgestellt werden, während für weniger leistungsstarke Kinder oft nur Routineaufgaben wie die Berechnung von Termwerten vorgesehen sind. Derartige Termwertberechnungen werden dann oft möglichst „abwechslungsreich“ verpackt: Nicht nur in „graue Päckchen“ und „bunte Hunde“ (Aufgaben, bei denen Figuren entsprechend auszurechnender Zahlen ausgemalt werden, vgl. WITTMANN 1991), sondern in eine Flut von Rechenrädern, Rechentieren, Worträtseln. usw., kurz: In unzähligen Aufgabenformen, die von den Kindern immer wieder neu zu dekodieren sind.

Abgesehen davon, dass der Vorbereitungsaufwand eines solchen Unterrichtes recht hoch ist, eröffnet er Kindern, denen immer wieder nur einfachste Routineaufgaben zugeteilt sind, kaum Chancen, ihr Leistungsvermögen zu erweitern. Leistungsunterschiede zwischen den Kindern werden damit manifestiert.

Das Bereitstellen „substanzieller“ Aufgabenformate für alle Kinder, die Schaffung anregender Lernumgebungen ist eine unverzichtbare Voraussetzung dafür, dass im Unterricht begabte Kinder gefördert und die Freude an der Mathematik bei allen Kindern geweckt wird. Dabei sind Aufgabenformate hilfreich

- deren Wesen alle Kinder erfassen und beschreiben können,
- bei deren Bearbeitung alle Kinder zumindest elementare Ergebnisse auf unterer Kompetenzstufe erreichen können und
- die Anregungen zum Weiterarbeiten auf höheren Niveaus bieten, wobei dann verschiedene Kinder entsprechend ihres Leistungsvermögens individuell unterschiedlich tief in die Aufgabe eindringen können.

Beispielhaft seien an dieser Stelle Rechentreppen genannt:

3 + 5 = 8	3 + 6 = 9	__ + __ = __
5 + 8 = 13	6 + 9 = 15	__ + __ = __
8 + 13 = 21	9 + 15 = 24	__ + __ = 100

Ausgehend von einer beliebigen Additionsaufgabe werden darunter treppenförmig weitere Aufgaben notiert. Untereinander sollen dabei immer die gleichen Zahlen stehen.

Alle Kinder können das Wesen solcher Rechentreppen erfassen, sie fortsetzen und eigene Rechentreppen mit drei oder mehr Stufen aufschreiben. Bereits das Zahlenmaterial werden die Kinder hier entsprechend ihres Leistungsniveaus wählen.

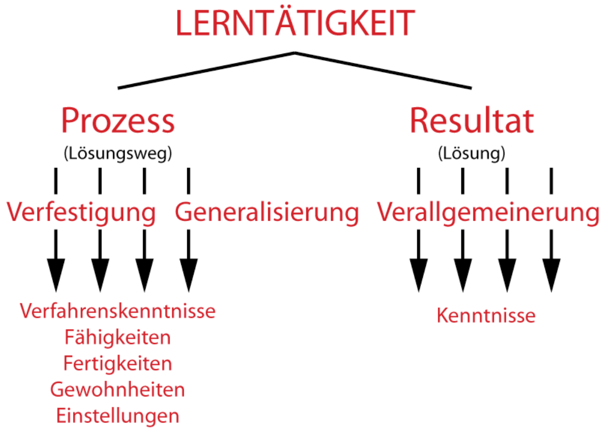
Untersuchungen zu Rechentreppen mit drei Stufen könnten sich anschließen: Wie ändert sich das Ergebnis in der dritten Zeile, wenn der erste Summand in der ersten Zeile um eins vergrößert wird? Wie ist es bei Änderung des zweiten Summanden? Derartige Überlegungen verbunden mit systematischem Probieren könnten zum Beispiel durch die Aufgabe ausgelöst werden, eine Rechentreppe mit drei Stufen und dem Ergebnis 100 zu finden. Leistungsstarke Kinder finden hier schon in Klasse 1 mehrere, möglicherweise sogar alle Lösungen. Die Anregung, eine Treppe z.B. mit Ergebnis 100 zu finden, erfordert keinen besonderen Vorbereitungsaufwand und kann in dem Moment gegeben werden, in dem sie für ein Kind förderlich ist.

Dabei weist ein Kind, welches das Ergebnis 100 durch mehrfaches und wenig systematisches Probieren erreicht, andere Kompetenzen nach als ein Kind, welches feststellt, dass bei einer Vergrößerung der zweiten Startzahl um 1 die Summe in der dritten Zeile um 3 vergrößert wird und dann den Summanden passend verändert. Wieder andere Kompetenzen weist ein Kind nach, welches sich planvoll auf die Suche nach allen Lösungen macht. Dennoch: Alle diese Kinder aber arbeiten am gleichen Aufgabenformat.

Derartige Aufgabenformate stehen allen Kindern offen, jeder kann entsprechend seines Leistungsvermögens daran arbeiten und unterschiedlich tief in die Sache eindringen. Dies anzuregen, dabei zu diagnostizieren und Hilfen zu geben, ist Aufgabe der Lehrerin.

Schon hier wird deutlich: Die Auswahl der Aufgaben allein reicht nicht aus. Es gibt prinzipiell keine „guten Aufgaben“ und „weniger guten Aufgaben“. Es gibt vielmehr nur ein bezogen auf bestimmte Ziele mehr oder weniger ***geeignetes Arbeiten mit Aufgaben***.

Lernen hat wie jede Tätigkeit zwei eng miteinander verbundene Seiten: Verlauf und Resultat. Dabei entstehen durch Verfestigung der Lernprozesse (Lernverläufe) Verfahrenskenntnisse sowie Fähigkeiten, Fertigkeiten, Gewohnheiten und Einstellungen, während durch Verfestigung der Resultate des Lernens vor allem Kenntnisse über Objekte und Zusammenhänge entstehen.



Diese Prozesse der Verfestigung und Generalisierung erfolgen langfristig und erfordern deshalb eine kontinuierliche Arbeit bei entsprechender Unterrichtskultur: Indem Kinder immer wieder auf eine bestimmte Art und Weise Aufgaben lösen, erwerben sie diesbezügliche Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten, Gewohnheiten und Einstellungen. Das bedeutet beispielsweise, immer wieder nicht nur richtige Ergebnisse als solche zu kennzeichnen, sondern vor allem auch den Verlauf des Lösens von Aufgaben in den Mittelpunkt zu stellen, ihn zu beschreiben, Lösungswege zu begründen, klassenöffentlich zu diskutieren. Davon profitieren Kinder *aller* Leistungsniveaus.

Dementsprechend sollten Aufgaben gezielt zum Entdecken, zum Beschreiben, zum Argumentieren herausfordern. Fähigkeiten und Fertigkeiten im Rechnen – hier sind Automatismen ausdrücklich eingeschlossen – spielen deshalb keine geringere Rolle, sie sind vielmehr eine wesentliche Voraussetzung: Wer beim Lösen substanzieller Aufgabenformate noch mühsam zählen muss, wird die diesen Aufgaben innewohnenden Zusammenhänge nur schwer oder gar nicht entdecken.

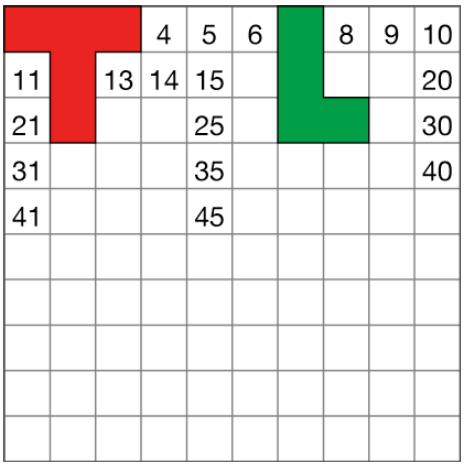
Sind die Aufgaben ausgewählt und gestellt, ist die Tätigkeitsbereitschaft der Kinder schnell hergestellt, die Bearbeitung der Aufgaben beginnt. Weckt die Aufgabe Neugier und Interesse der Kinder, weil es beispielsweise eine interessante Knobelaufgabe ist oder eine Beziehung zur Alltags- und Umwelterfahrung der Kinder besteht, kommt es nach dem Stellen der Aufgabe in der Regel rasch dazu, dass die Kinder beginnen, die Aufgabe zu bearbeiten. Jetzt ist es entscheidend, den Prozess der Aufgabenbearbeitung in Gang zu halten und Kinder bei Problemen zum Weiterarbeiten, zum erneuten Probieren, zum Korrigieren von Irrtümern zu ermutigen. Bei Schwierigkeiten im Handlungsvollzug besteht nämlich immer die Gefahr, dass die Kinder die Handlung kurzerhand abbrechen. Dabei werden der Handlung entgegenstehende affektive Prozesse ausgelöst. Kinder, die sich eben noch hoch motiviert einer Aufgabe zuwandten, erleben, dass sie diese Aufgabe nicht lösen können und wenden sich demotiviert von der sie überfordernden Aufgabe ab. Tritt eine derartige Situation häufiger ein, verfestigen sich Motive, wandeln sich Einstellungen, entsteht Desinteresse. Aus Schulanfängern, die sich auf das Lernen gerade auch im Fach Mathematik freuten, werden dann allzu schnell die oben genannten Kinder, die schon in Klasse 3 „ach Mathe" sagen und ihre Erfolgsaussichten dort nur noch als gering einschätzen. Das unterstreicht: Die Förderung mathematisch begabter Kinder und die Entwicklung mathematischen Interesses bei allen Kindern sind zwei untrennbare Merkmale des Unterrichts.

Von außerordentlicher Bedeutung für die Befähigung der Kinder zum Lösen von Aufgaben ist die Phase der Rückbesinnung, der Rückschau auf die Lösung und den Lösungsweg. Die Rückschau auf die Lösung ordnet diese in den Ausgangskontext ein. Gewohnheitsmäßig sollten sich Kinder die Frage stellen, was das Ergebnis (etwa eine Längenangabe, ein Preis oder auch ein Zahlenwert) bedeutet, ob es sinnvoll ist und mit der Erwartung bzw. den Erfahrungen übereinstimmt. Bei der Rückschau auf den Lösungsweg werden erfolgreiche Arbeitsweisen beim Lösen von Aufgaben bewusst. Rückschauend erleben Kinder beispielsweise den Wert systematischen Probierens, den Nutzen von Tabellen und Diagrammen oder die Nützlichkeit von Skizzen beim Lösen von Sachaufgaben. Hier gibt es großes Potenzial für klassenöffentliche Diskussionen, für ein Lernen miteinander und voneinander, welches für alle Kinder förderlich ist. Eine solch gewohnheitsmäßig erfolgte Rückschau auf den Lösungsweg fördert die Methoden*bewusstheit*, die auch bei mathematisch begabten Kindern nicht einfach vorausgesetzt werden kann: Den Kindern werden die verschiedenen Strategien bewusst und sie lernen, sie gezielt auszuwählen und einzusetzen. Gerade das für das Lösen mathematischer Aufgaben charakteristische Zurückführen neuer auf bereits bekannte Aufgaben kann den Kindern hier als eine wesentliche Arbeitsweise bewusst werden. Dabei ist oft eine Verbindung von Arithmetik und Geometrie hilfreich. So können die Kinder Lösungswege mit geometrischen Mitteln veranschaulichen, sie so besser verstehen und anderen beschreiben.

Das beginnt bei der Darstellung von Rechenstrategien am leeren Zahlenstrahl, setzt sich fort beim Erwerb von Einsichten in die Eigenschaften von Zahlen und Operationen und geht bis hin zu interessanten, produktiven Aufgabenformaten, welche dank der Verbindung von Arithmetik und Geometrie auf sehr unterschiedlicher Ebene bearbeitet werden können, die erweiterbar sind und bis hin zu prinzipiellen strukturellen Betrachtungen ausgebaut werden können. An exemplarischen Beispielen[6] soll nachfolgend ein derart geeignetes Arbeiten mit Aufgaben, welches die oben genannten Überlegungen berücksichtigt, illustriert werden.

4 Beispiele

4.1 „Buchstabenzahlen“



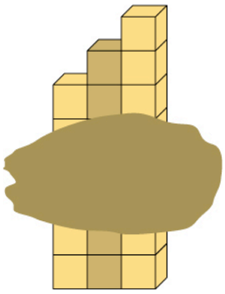
In einen Hunderterfeld werden fünf Felder so gefärbt, dass sie ein T ergeben. Die Zahlen in diesen Feldern werden addiert. In der Abbildung ist die Summe der gefärbten Felder des T gleich 40. Die Zahl 40 ist deshalb eine T – Zahl. Alle Kinder können färben und weitere T – Zahlen finden. Beim Vergleich der gefundenen Zahlen werden die Kinder feststellen, dass alle T – Zahlen Vielfache von 5 sind. Dies kann begründet werden. Dabei werden Argumente ausgetauscht. Anregend kann die Aufforderung sein, jene Position des T zu finden, an der T = 66 ist. Wenn die Kinder diese Stelle nicht finden, drängt sich die Vermutung auf, dass T nicht 66 sein kann. Die Vermutung muss begründet werden. Hilfreich ist die Überlegung, wie sich die T – Zahl verändert, wenn das T um ein Feld nach rechts bzw. nach unten verschoben wird. Wird die

[6] Diese und weitere Beispiele findet der Leser in LORENZ (Hrsg.) 2008_a und LORENZ (Hrsg.) 2008_b

Aufgabe analog für ein L (bestehend aus 4 Quadraten) bearbeitet, können die Kinder Gemeinsamkeiten und Unterschiede finden. Systematisches Probieren hilft den Kindern, die Buchstaben T und L so im Hunderterfeld zu platzieren, dass L = T ist.
Erfahrungsgemäß werden die Kinder gern mit weiteren Buchstaben, insbesondere denen ihres Namens, arbeiten und dann ihre Entdeckungen beschreiben. Das Wort TOLL (ein O ist dabei ein 3 x 3 Quadrat mit einem Loch in der Mitte) so von links nach rechts lesbar in das Hunderterfeld einzutragen, dass TOLL = 1000, erfordert Rechenfertigkeit, sehr viel Zahlensinn, Einsicht in funktionale Abhängigkeiten und die Fähigkeit zu systematischem Probieren. Letztere Aufgabe ist lösbar, wobei allerdings nicht alle Buchstaben in der gleichen Höhe angeordnet werden können. Alles in allem sind Buchstabenzahlen ein Aufgabenformat, welches alle Kinder der Klasse auf unterschiedlichem Niveau bearbeiten können.

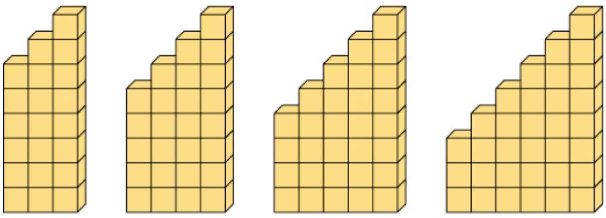
4.2 Summen aufeinander folgender Zahlen

Werden Eigenschaften von Summen aufeinander folgender Zahlen untersucht, so kann das zunächst an vielen Beispielen geschehen. So erkennen die Kinder an mehreren Beispielen, dass die Summe dreier aufeinander folgender natürlicher Zahlen vermutlich stets durch 3 teilbar ist. Eine Begründung dieses Sachverhaltes ist arithmetisch über die Konstanz der Summe bei gegensinnigem Verändern möglich. Wesentlich eindrucksvoller wird die Gültigkeit der Vermutung bei der Veranschaulichung der Zahlen mittels Würfeltürmen:

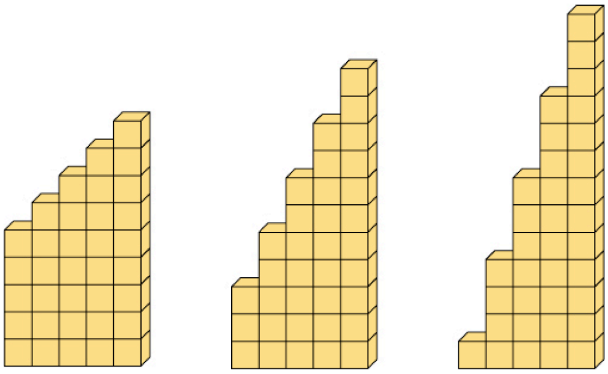


In der Abbildung sind 3 aufeinander folgende Zahlen dargestellt. Beim realen oder gedanklichen Umordnen wird sofort klar, dass die Anzahl der Würfel durch 3 teilbar ist, denn es können drei gleich hohe Türme gebaut werden. Ihre Höhe ist die des mittleren Turmes. Das Tuch verdeutlicht, dass es nicht auf die konkreten Anzahlen ankommt.

Verallgemeinerungen dieser Aussage sind in verschiedene Richtungen möglich. So kann die Anzahl der Summanden variiert werden:



Durch reales oder mentales Umordnen können die Kinder feststellen, dass die Summe von 3 aufeinander folgenden Zahlen *stets* durch 3 teilbar ist und dass die Summe von 5 aufeinander folgenden Zahlen *stets* durch 5 teilbar ist.
Es wird auch klar, warum das nicht analog für die Summe von 4 und die Summe von 6 aufeinander folgenden Zahlen gilt: Den entsprechenden Bauwerken fehlt die „Mitte“.
Der Schritt zur Verallgemeinerung auf jede ungerade bzw. jede gerade Anzahl aufeinander folgender Zahlen ist nun nahe liegend.
Eine weitere Möglichkeit der Verallgemeinerung betrifft die „Schrittweite“. Waren es bisher stets aufeinander folgende Zahlen, könnten auch andere Abstände gewählt werden:



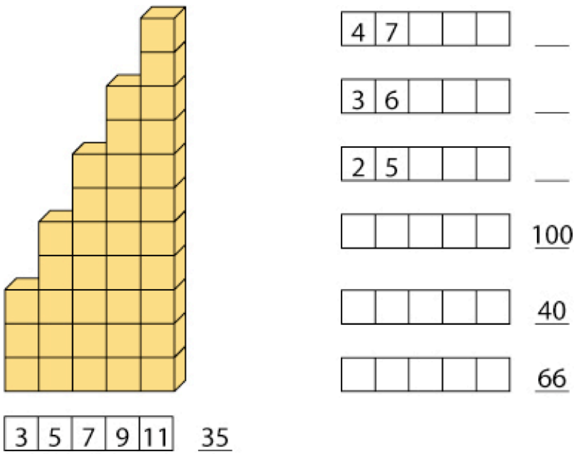
Abermals kann umgeordnet werden. Aus der Handlung heraus wird deutlich, dass alle drei Bauwerke die gleiche Anzahl Würfel enthalten und dass diese Anzahl das fünffache der Anzahl Würfel in der mittleren Stange ist, denn diese Stange bleibt ja beim Umordnen jeweils in der Höhe unverändert.

Hier wird die Idee des gegensinnigen Veränderns beim Addieren deutlich. Zugleich wird das Verständnis für arithmetische Zahlenfolgen und deren Partialsummen angebahnt.

Entsprechende nichtgeometrische Probleme sollten deshalb im Unterricht nicht isoliert auftreten, sondern von den Kindern als strukturgleich erkannt werden können. Das sollte in der Phase der Rückbesinnung erörtert werden. Passende Aufgaben sind beispielsweise:

> *Zwei Eichhörnchen sammeln Nüsse für den Winter. Das erste beginnt am Montag und sammelt von Tag zu Tag immer um die gleiche Anzahl mehr Nüsse. Am Freitagabend hat es insgesamt 100 Nüsse gesammelt. Das zweite Eichhörnchen verschläft den Montag und fängt erst am Dienstag an zu sammeln. Auch dieses Eichhörnchen sammelt von Tag zu Tag um die gleiche Anzahl Nüsse mehr und hat am Freitagabend insgesamt 100 Nüsse gesammelt. Wer von beiden sammelt am Mittwoch mehr Nüsse?*
>
> *Paul trainiert Liegestütze. Er will einen Trainingsplan für die erste Woche aufstellen, bei dem er sich von Tag zu Tag um die gleiche Anzahl Liegestütze steigert. Insgesamt will er in den ersten 7 Tagen 100 Liegestütze machen. Kannst Du ihm erklären, warum er einen solchen Plan nicht aufstellen kann?*

Die Verbindung von Arithmetischem und Geometrischem kann hergestellt werden, indem zu jeder Würfeltreppe ein „Bauplan“ angegeben wird:



Jeder Bauplan einer Treppe ist durch die Startzahl und die Additionszahl (also die Höhe der Stufe) eindeutig festgelegt.

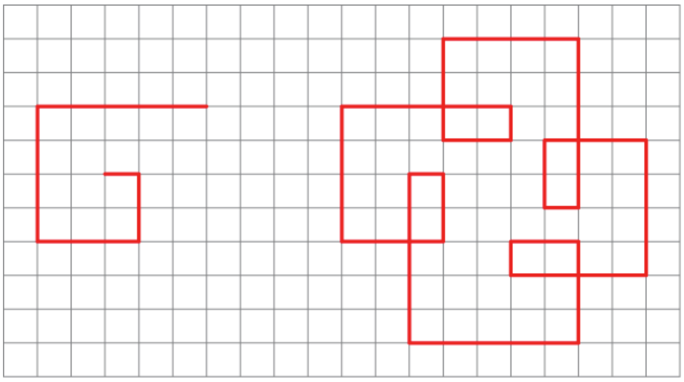
Weiterführend kann die Frage untersucht werden, welche Zahlen nicht als Summe von aufeinander folgenden Zahlen gebildet werden können.

Die Kinder werden beim Probieren erkennen, dass das die Zahlen 2, 4, 8, 16, … sind. Sie werden verallgemeinernd vermuten, dass alle Zweierpotenzen nicht als Summe von aufeinander folgenden Zahlen darstellbar sind. Leistungsstarke Kinder werden erfassen, dass die Darstellung einer Zahl als Summe aufeinander folgender Zahlen nur dann möglich ist, wenn die Zahl wenigstens einen von 1 verschiedenen ungeraden Teiler hat (der Gedanke der Mitte!). Nur die Zweierpotenzen haben keinen ungeraden Teiler größer als 1 und sind deshalb nicht als Summe aufeinander folgender Zahlen darstellbar.

Abermals wird deutlich: Alle Kinder können sich auf sehr unterschiedlichem Niveau mit dem Aufgabenformat beschäftigen. Sie sollten dabei immer die Gelegenheit erhalten, ihre Entdeckungen klassenöffentlich darzustellen.

4.3 Spirolaterale

Eine Zeichenaufgabe, die bereits von Kindern in Klasse 1 bewältigt werden kann, ist das Zeichnen von so genannten Spirolateralen nach vorgegebenen Zahlen.
Eine Zahlenfolge wie beispielsweise 1 – 2 – 3 – 4 – 5 wird vorgegeben. Auf Quadratgitterpapier wird gezeichnet. Dabei wird immer „in Fahrtrichtung“ rechts abgebogen.
Für die Beispielzahlen ergeben sich damit nach einem Durchlauf von fünf Zügen bzw. für die fertige Zeichnung die in der Abbildung dargestellten Figuren:



Alle Kinder können hier ihre Zeichenfertigkeiten „frei Hand“ vervollkommnen. Wenn die Kinder die Zahlen und die Anzahl der gewählten Zahlen variieren, ergibt sich ein weites Feld zum Vermuten, Probieren, Ana-lysieren, Vergleichen, Verallgemeinern:

Interessant ist der Vergleich von Paaren von Streckenzügen:

- Vergleiche beispielsweise von 1 – 2 – 3 mit 3 – 2 – 1 usw. zeigen, dass diese Streckenzüge nicht identisch sind, sondern dass jeweils einer das Spiegelbild des anderen ist.
- Vergleiche wie beispielsweise 1 – 2 – 3 mit 2 – 4 – 6 führen zum Vergrößern, zum Maßstab.

Interessant ist die Frage, wann ein Streckenzug sich schließt. Mit nur zwei Zahlen wird es immer ein Rechteck, mit drei Zahlen schließt sich der Streckenzug nach dem zwölften Zug. Bei vier Zahlen driftet der Streckenzug ab. Die Frage nach der Erklärung des Beobachteten führt gerade bei mathematisch begabten Kindern früher oder später zu arithmetischen Betrachtungen:

Bei 3 Zahlen

nach rechts	**nach unten**	**nach links**	**nach oben**
2	5	1	2
5	1	2	5
1	2	5	1
Summe: 8	**Summe: 8**	**Summe: 8**	**Summe: 8**

Bei drei Zahlen wie 2 – 5 – 1 sind erstmalig nach vier Durchläufen alle vier Spalten mit gleich vielen Zahlen gefüllt, weil 3 als die Anzahl der Zahlen und 4 als die Anzahl der Richtungen teilerfremd sind. In jeder Spalte steht dann jede der drei Zahlen genau einmal. Die Summe der Wege nach rechts ist dann so groß wie die Summe der Wege nach links, die Summe der Wege nach oben ist so groß wie die Summe der Wege nach unten. Also sind hier Endpunkt und Anfangspunkt des Streckenzuges identisch.

Bei 4 Zahlen

nach rechts	nach unten	nach links	nach oben
1	2	3	4
1	...		

Bei vier Zahlen ist die „Bilanz" nach mehreren Durchläufen immer ein Vielfaches der Bilanz des ersten Durchlaufs. Bei 1 – 2 – 3 – 4 beispielsweise ergibt sich, dass der Streckenzug nach jedem Durchlauf um zwei Schritte nach links und um zwei Schritte nach oben gegenüber seinem Anfangspunkt endet. Das können die Kinder beim Zeichnen mit verschiedenen Zahlen – etwa arbeitsteilig in Gruppenarbeit - experimentierend entdecken.

Die Frage, welche Streckenzüge den gleichen Start- und den gleichen Endpunkt wie ein vorgegebener Streckenzug haben, vertieft hier das Verständnis ebenso wie die Aufforderung, den Verlauf eines Streckenzuges vorherzusagen oder einen Streckenzug anzugeben, der einen bestimmten Verlauf hat.

Bei 5 Zahlen

nach rechts	nach unten	nach links	nach oben
1 (a)	2 (b)	3 (c)	4 (d)
5 (e)	1 (a)	2 (b)	3 (c)
4 (d)	5 (e)	1 (a)	2 (b)
3 (c)	4 (d)	5 (e)	1 (a)
2 (b)	3 (c)	4 (d)	5 (e)
15 (a+e+d+c+b)	**15 (b+a+e+d+c)**	**15 (c+b+a+e+d)**	**15 (d+c+b+a+e)**

Bei fünf Zahlen wie 1 – 2 – 3 – 4 – 5 (a – b – c – d – e) sind erstmalig nach fünf Durchläufen alle vier Spalten mit gleich vielen Zahlen gefüllt, weil 4 und 5 teilerfremd sind. In jeder Spalte steht dann jede der 5 Zahlen genau einmal. Die Summe der Wege nach rechts ist so groß wie die Summe der Wege nach links, die Summe der Wege nach oben ist so groß wie die Summe der Wege nach unten. Das kann ausgehend von Beispielen verallgemeinert oder auch mit Variablen dargestellt werden.

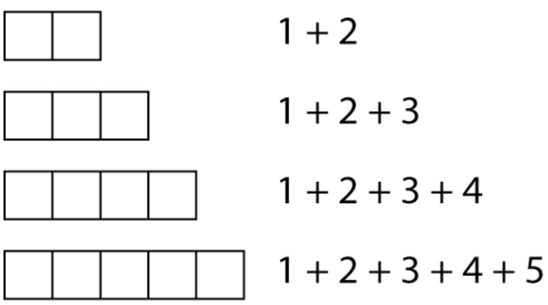
Bei 6 Zahlen

nach rechts	nach unten	nach links	nach oben
1	2	3	4
5	6	1	2
3	4	5	6
Summe: 9	**Summe: 12**	**Summe: 9**	**Summe: 12**

Bei 6 Zahlen sind bereits nach 3 Durchläufen erstmalig alle 4 Spalten mit gleich vielen Zahlen gefüllt, weil der größte gemeinsame Teiler von 4 und 6 die Zahl 2 ist.
Werden beispielsweise die Zahlen 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 gewählt, ergeben sich obige Summen. Dieses Spirolateral schließt sich bereits nach 3 Durchläufen.
Die Frage, ob sich das Spirolateral mit 6 Zahlen *stets* bereits nach 3 Durchläufen schließt, kann unter Nutzung von Variablen beantwortet werden.
Weitere Betrachtungen sind zu folgenden Fragen möglich: Wie ist es bei Spirolateralen mit 7, 8, 9 ... Zahlen? Wann schließt sich da das Spirolateral? Wie können die Zahlen klassifiziert werden, um Aussagen für eine Klasse von Zahlen zu erhalten.

Im Unterricht kann dieses Aufgabenformat auf unterschiedlichen Niveaustufen bearbeitet werden. Während einige Kinder zunächst vor allem ihre Fertigkeiten im Zeichnen vervollkommnen, stehen für andere Kinder elementare funktionale Betrachtungen im Mittelpunkt. Sie zeichnen und vergleichen, werfen Fragen auf, ändern planmäßig, vergleichen erneut und verallgemeinern zu Aussagen wie „Wenn man die zweite Zahl eines Dreierspirolaterals immer mehr vergrößert, dann … .“ oder „Wenn man alle Zahlen eines Spirolaterals verdoppelt, dann … .“ Wieder andere Kinder untersuchen die oben diskutierte Frage, wann sich Spirolaterale schließen, verallgemeinern dabei möglicherweise von konkreten Beispielen, an denen sie Allgemeines zeigen oder nutzen vielleicht Variable zur Beschreibung der Spirolaterale.

4.4 Muster von Figuren und Würfelbauten



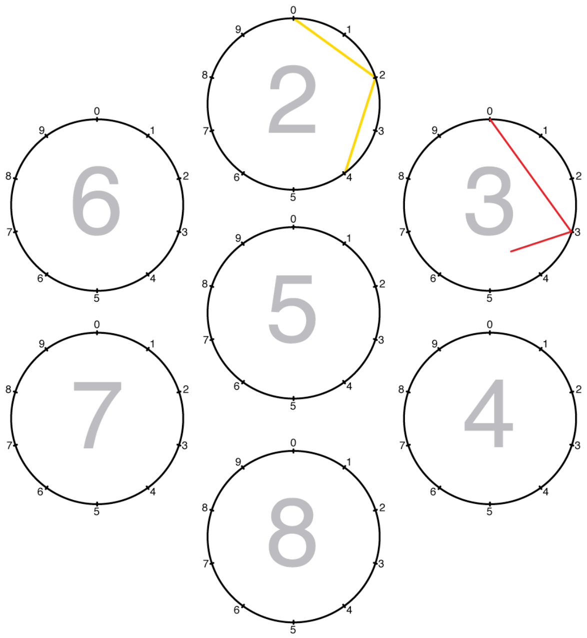
Die Aufgabe, in einem Streifen von 2, 3 oder 4 nebeneinander liegenden Quadraten alle Vierecke zu finden, ist ein Standard in der Klasse 2. Diese Aufgabe kann ohne viel Aufwand so erweitert werden, dass sie sowohl leistungsstarke Kinder herausfordert, als auch viele Kinder selbst zu Verallgemeinerungen finden lässt. Schon beim Beantworten der Frage, wie viele Vierecke in einem Zehnerstreifen zu finden sind, werden viele Kinder nicht mehr zeichnen und zählen. Die Frage, wie viele Vierecke in einem Hunderterstreifen zu finden sind, erfordert das Herausarbeiten und Anwenden einer Gesetzmäßigkeit. Diese Gesetzmäßigkeit erkennen Kinder in der Regel dann schneller, wenn bei den ersten Streifen nicht nur die Anzahl der Vierecke, sondern so wie in der Abbildung auch die Summe notiert wird.
Erweiterungen bieten folgende Fragen:

- Wie viele Quadrate sind in einen 2 x 2 Quadrat zu finden, wie viele in einem 3 x 3 Quadrat, einem 4 x 4 Quadrat, wie viele in einem Hunderterfeld?
- Wie viele Vierecke sind in einem 2 x 3 Rechteck zu finden, wie viele in einem 2 x 4 Rechteck?

Weitere Fragen können die Kinder selbst finden. Sie können auch analoge Aufgaben zu Quadern stellen, die aus Würfeln gebaut sind.

4.5 Muster im Zehnerkreis

Werden im Zehnerkreis Muster gezeichnet, indem in Zweier-, Dreier- oder Vierersprüngen weitergezeichnet wird, so ist das zunächst eine Aufgabe zur Entwicklung von Fertigkeiten im Zeichnen.



Nach dem Zeichnen und dem Vergleich der Resultate haben die Kinder die Gelegenheit, ihre Beobachtungen zu erklären, Fragen aufzuwerfen usw.

- Warum sind die Muster der 2 und der 8, der 3 und der 7, der 4 und der 6 sowie der 1 und der 9 jeweils gleich.
- Welche Muster berühren jeden Punkt? Warum ist das so?

Hierbei kommen die Schüler zwangsläufig von der geometrischen Erscheinung zum arithmetischen Wesen. Teiler und Vielfaches, Teilerfremdheit, gerade und ungerade Zahlen. Alles das spielt bei der Erklärung des Beobachteten eine Rolle. In fünf Zweierschritten kommt man zur 10, kein Vielfaches der 2 ist ungerade. Auch in Viererschritten kommt man niemals zu einer ungeraden Zahl. Ein Viererschritt vorwärts ist am Zehnerkreis das Gleiche wie ein Sechserschritt rückwärts usw.

Auch hier gibt es die Möglichkeit zur Weiterführung:

- Wie sehen die entsprechenden Muster am Zwölferkreis, etwa an der Uhr aus? Warum ist das Muster der 5, welches am Zehnerkreis nur eine Strecke war, an der Uhr ein Stern, der alle Zahlen berührt? Warum ist umgekehrt das Muster der 3, welches am Zehnerkreis noch ein Stern war, nunmehr ein Quadrat?
- Wie ist es an Kreisen, die anders, beispielsweise in 6, in 7 oder in 8 Teile eingeteilt sind?
- Gibt es Einteilungen eines Kreises, bei denen das Muster *jeder Zahl* einen Stern liefert, der alle Zahlen des Kreises berührt?
- Welche Muster ergeben sich, wenn am Zehnerkreis nicht addiert, sondern multipliziert wird und wenn dabei nur die Einer berücksichtigt werden? (Das Muster der 3 wäre dann der Streckenzug 3 – 9 – 7 – 1 – 3).
- Wie könnte das Multiplikationsmuster der 4 im Sechserkreis aussehen?

5 Zum Abschluss

Den Beispielen, die fast alle ohne vorbereitete Kopien und nur unter Nutzung des Heftes einsetzbar sind, ist eines gemeinsam: Der Rahmen und damit der Einstieg für alle Kinder ist zunächst gleich und die Kinder können dann individuell verschieden tief in die Aufgabe eindringen. Das hat gegenüber dem oft anzutreffenden Arbeiten mit völlig wesensverschiedenen differenzierenden Zusatzaufgaben den Vorteil, dass prinzipiell jedem Kind alle Möglichkeiten des Aufgabenformates offen stehen und nicht einige Kinder von vornherein von bestimmten Anforderungen ausgeschlossen werden. Aufgabe der Lehrerin ist es dabei, zu beobachten, Impulse zu geben, Fragen aufzuwerfen, zu Vertiefungen anzuregen, also den Prozess der Aufgabenbearbeitung in Gang zu halten und die Kinder nicht zuletzt zu einer Rückbesinnung insbesondere auf den Lösungsweg anzuregen. So wie hier dargestellt, sollte es generell Standard sein, Aufgaben hinsichtlich ihrer Potenzen für differenzierendes Arbeiten zu analysieren.
Die Art und Weise der Förderung mathematisch begabter Kinder ist ein Indikator für die Grundqualität des Unterrichts insgesamt. Dort, wo begabte Kinder selbstverständlich innerhalb des alltäglichen Unterrichts und ohne aufwändige Zusatzaufgaben gefördert werden, gibt es zugleich Lernchancen für alle Kinder. Das setzt eine fachlich souveräne Lehrerin voraus, die virtuos die vorhandenen Aufgaben didaktisch vereinfachen oder erschweren kann, um den Kindern differenzierende Angebote zu machen.

Literatur

BOS, W. u.a. (Hrsg.) (2003): Erste Ergebnisse aus IGLU. Münster: Waxmann

BOS, W. u.a. (Hrsg.) (2008): TIMSS 2007 Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann

EICHLER, K.-P. (2007): Ziele hinsichtlich vorschulischer geometrischer Erfahrungen. In: Hendrik Radatz – Impulse für den Mathematikunterricht. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage, S. 176 - 185

FANGHÄNEL, G. (2000): Arbeit mit Aufgaben – wesentliches Mittel zur Gestaltung modernen Mathematikunterrichts. In: Mathematikunterricht gestalten. Berlin: PAETEC

LORENZ, J. H. (HRSG.); EICHLER, K.-P. ; KAUFMANN, S.; JANSEN, H.; RÖTTGER, A. (2008_a): Mathematikus 3. Braunschweig: Westermann

LORENZ, J. H. (HRSG.); EICHLER, K.-P. ; KAUFMANN, S.; JANSEN, H.; RÖTTGER, A. (2008_b): Mathematikus 4. Braunschweig: Westermann

SCHIPPER, W. (2001): Offenheit und Zielorientierung. In: Grundschule Heft 3, S. 10 -15

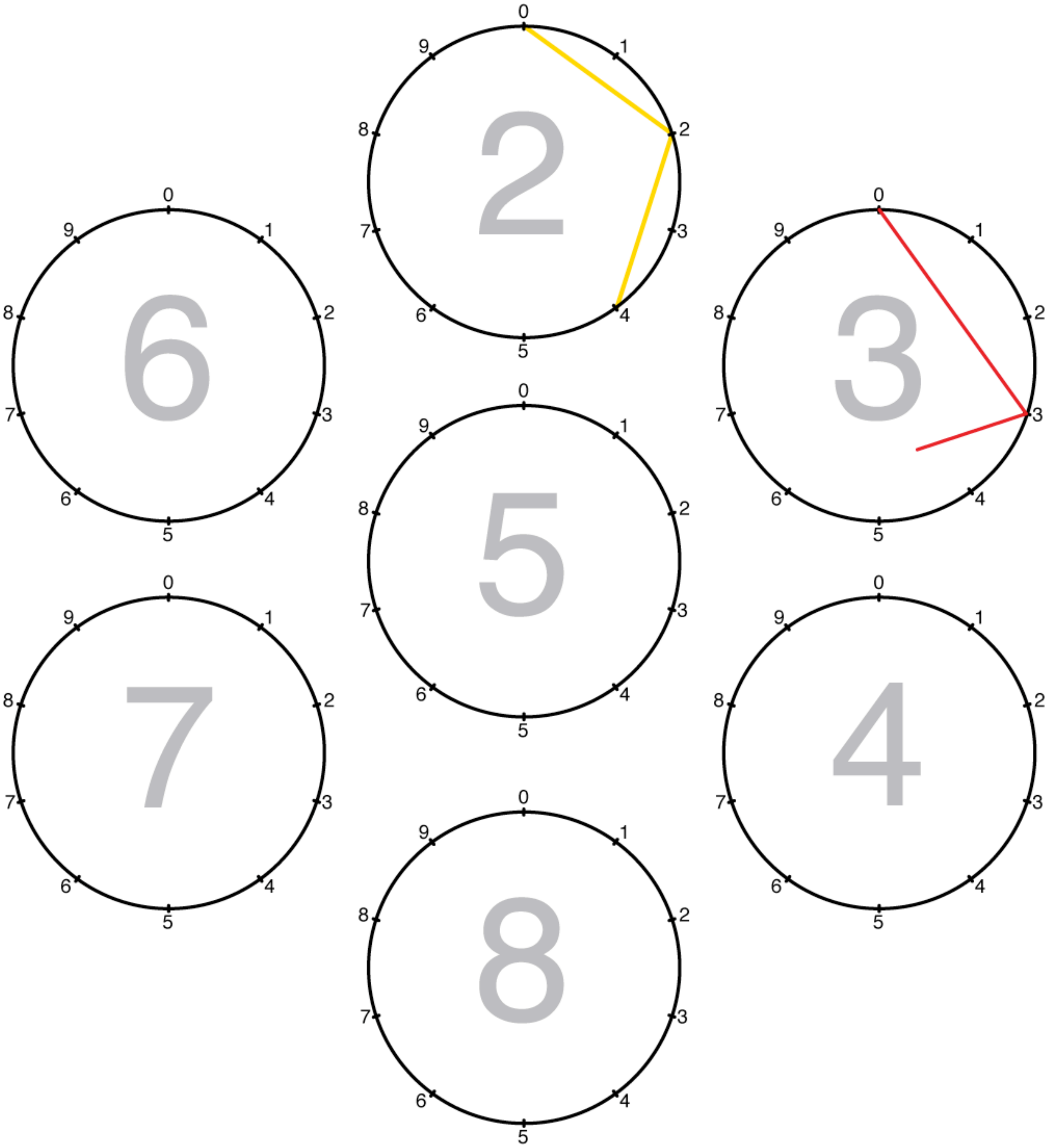
WEBER, K. (1987): Ziele, Inhalt und Prozesskonzeption des Mathematikunterrichts nach den neuen Lehrplänen der Klassen 1 bis 3. In: Unterstufe Heft 4

WITTMANN, E. Ch. (1996) offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus. In Grundschulunterricht Heft. 6, S. 3-7

WITTMANN, E. Ch.; Müller, G. (1991): Wider die Flut der bunten Hunde und der grauen Päckchen. In: Handbuch produktiver Rechenübungen Bd. 1. S. 152 – 166. Stuttgart: Klett

Muster am Zehnerkreis

Beginne stets bei Null und gehe dann immer 2 (3, 4, ...) Schritte weiter. Zeichne die Streckenzüge und vergleiche die Muster. Beschreibe, was du entdeckst.



Muster an der Uhr

Beginne stets bei Null und gehe dann immer Schritten zu 2 Stunden (3 h, 4 h, ...) weiter.
Zeichne die Streckenzüge und vergleiche die Muster. Beschreibe, was du entdeckst.