Arbeit mit Sachaufgaben – planmäßig und erfolgreich

1 Probleme mit Sachaufgaben

Schwierigkeiten der Kinder beim Lösen von Sachaufgaben sind nicht neu. Das ist auf den ersten Blick insofern unverständlich, als doch von Klasse 1 an mathematische Objekte und Beziehungen aus Sachverhalten gewonnen werden. An Sachverhalten sehen die Kinder beispielsweise, dass 3 + 4 = 7 ist und dass 7 – 4 = 3 ist. Am Sachverhalt bzw. einer Abbildung können sie aushandeln bzw. „einsehen“ dass auch 4 + 3 = 7 ist. Eine enge Verbindung von Sachverhalt und seiner mathematischen Beschreibung ist also – zumindest im Anfangsunterricht – unverzichtbar und auch später durchaus möglich.
Dennoch ist es in der Praxis oft anders. Wir fragten Kinder am Ende der Klasse 3 nach ihrem Verhältnis zu Sachaufgaben. Die Antworten sind bezeichnend:

- „Sachaufgaben gefallen mir nicht besonders, weil man bei den anderen Aufgaben gleich weiß, was man rechnen soll.“ meint Dennis.
- Diana sagt: „Lieber rechne ich richtige Aufgaben“ und das, was für sie „richtige Aufgaben“ sind, ahnen wir nur zu gut.
- Hanna sagt: „Erst machen wir immer ein Beispiel. Die anderen Aufgaben sind dann leicht“. Ohne es zu wollen, hat Hanna charakterisiert, was zu oft noch typisch im Unterricht ist. Sachaufgaben werden so angeordnet, dass den Kindern schnell klar ist, welche Rechenoperation anzuwenden sind: Serien gleichartiger Sachaufgaben sind auf die gleiche Weise zu bearbeiten. Dann können Kinder auch ohne inhaltliches Verständnis des Sachverhaltes mit den im Text vorkommenden Zahlen das Richtige ausrechnen.
- Sven meint: „In der Schule geht es, aber zu Hause finde ich die Zahlen nicht heraus oder komme auf eine falsche Aufgabe.“ Diese Äußerung ist typisch für Kinder, die den Weg vom Sachverhalt zum Term im Unterricht nicht selbst gehen, sondern nur den von anderen Kindern gefundenen Term nutzen, seinen Wert bestimmen und dann den Antwortsatz schreiben. Oft meinen sie, die Aufgabe selbst gelöst zu haben, obwohl sie doch den wesentlichen Schritt von Sachverhalt zum Term nicht bewältigen mussten.

Nachfolgend sollen neben prinzipiellen Gedanken konkrete Vorschläge gemacht werden, wie Kinder zum Lösen von Sachaufgaben befähigt werden können.

2 Die Welt, die Mathematik und das Kind mittendrin

Die Funktion mathematischer Bildung, also der Zweck, mit dem Kinder mit Mathematik konfrontiert werden, hat unabhängig von der Altersstufe zwei untrennbar miteinander verbundene Seiten:
Einmal befähigen die erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, Gewohnheiten und Einstellungen zur Beantwortung elementarer Fragen aus der Umwelt und aus der Mathematik und schaffen eine tragfähige Basis für erfolgreiches weiteres Lernen nicht nur im Fach Mathematik.
Zugleich besitzen mathematische Aktivitäten wesentliche Potenzen für die harmonische Entwicklung des Kindes. Das betrifft insbesondere

- das Wecken von Neugier und Interesse an mathematischen Tätigkeiten, Objekten und Fragestellungen,
- das Wecken der Freude an mathematischen Aktivitäten speziell und an entdeckendem Lernen generell,
- die Förderung der Fantasie und der Kreativität,
- die Denk-, Gedächtnis- und Sprachentwicklung,
- die Befähigung zu und die Gewöhnung an ausdauernde, konzentrierte Lernarbeit,
- die Erziehung zu Genauigkeit, Sorgfalt und Eigenverantwortung und nicht zuletzt
- die Entwicklung sozialer Verhaltensweisen.

Dabei ist gerade die Art und Weise der Aneignung mathematischer Inhalte entscheidend dafür, ob und wie diesen beiden Seiten Rechnung getragen wird. Hier wird deutlich, dass der Bezug von Umwelt und Mathematik und damit die Arbeit mit Sachaufgaben eine bedeutende Rolle spielt. Abbildung 1 zeigt das Verhältnis von Mathematik und Umwelt.

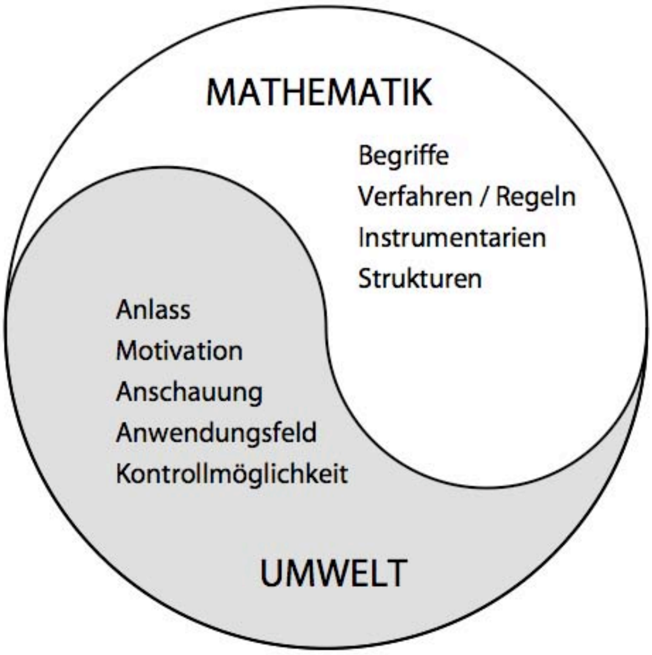


Abbildung 1 – Mathematik und Umwelt

Im Mathematikunterricht Sinn zu stiften bedeutet stets auch, diesem Verhältnis Rechnung zu tragen und damit der Umwelt die genannten Funktionen zu geben. Erst mit einer mittelbaren oder unmittelbaren Beziehung zur Lebenswirklichkeit ist das Erworbene für den Lernenden sinnhaft und hat die Funktion eines Werkzeugs.
Entsprechend sollte der Erwerb mathematischer Erfahrungen aus der Kindperspektive aufgebaut sein, sollte er die Alltags- und Umwelterfahrungen der Kinder berücksichtigen und dabei dennoch – und das ist Aufgabe der Lehrerin – die Fachsystematik im Auge behalten. Das Kind findet seine Erfahrungen „aufgehoben" und der Lehrerin weiß, welche langfristigen Ziele mit dieser oder jener Aktivität verfolgt werden.

3 Arbeiten mit Aufgaben

Wir sehen in der Tradition von Weber und Fanghänel ein geeignetes Arbeiten mit Aufgaben[1] als das Hauptmittel zur Sicherung einer auf den Aneignungsgegenstand gerichteten geistigen Tätigkeit und damit zur Realisierung der Ziele des Unterrichts an.
Nachfolgend soll ein aus unserer Sicht geeignetes Arbeiten mit Aufgaben mit Blick auf die Arbeit mit Sachaufgaben skizziert werden.

Zur Auswahl der Aufgaben

Es ist wichtig, solche Aufgaben auszuwählen und zu stellen, die das Potenzial haben, Kinder geistig anzuregen, also etwa Objekte zu vergleichen, von Unwesentlichem zu abstrahieren, zu Verallgemeinern usw. Bezüge zur Lebenswirklichkeit, attraktive Probleme sowie Anregungen zu äußeren Handlungen sind dabei eine sehr hilfreiche Unterstützung dieser geistigen Tätigkeiten.

[1] Unter Aufgabe wird hier eine Aufforderung an das Kind zum Handeln verstanden, welche das Kind mit seinem Wissen und Können lösen oder aber als unlösbar erkennen kann. Hier wird insbesondere das Problem der „Passung" zwischen Anforderungen und subjektiven Voraussetzungen deutlich: Was eine Aufgabe ist, hängt vom Löser ab.

Speziell die eingesetzten Sachaufgaben sollten
- sprachlich dem Niveau der Kinder angepasst sein (hinsichtlichTextlänge, Wortwahl und vor allem Satzbau), aber auch zum Lesen herausfordern
- eine den Kindern vertraute Situation aufgreifen,
- Neugier und Interesse wecken, eine herausfordernde Sachsituation beschreiben,
- inhaltlich abwechslungsreich gestellt sein (also nicht immer nur einen Bereich wie etwa das Einkaufen aufgreifen),
- die Kinder auch informieren, sie mit interessanten Fakten konfrontieren, die nicht zur „mathematischen Pflicht“ gehören, aber zur Allgemeinbildung beitragen wie beispielsweise
  - Interessantes aus der Technik einst und jetzt, etwa der Eisenbahn ... ,
  - Informationen zu Tieren (etwa zu Masse und Futterbedarf einer Kohlmeise), insbesondere zu Haustieren
  - Interessantes zu Pflanzen, wie etwa die Tatsache, dass auf einem guten Acker etwa zehnmal soviel Kartoffeln geerntet werden, wie man legt,
  - Daten zur Geschichte der Stadt, der Gemeinde, der Region,
  - Fakten zur gesunden Lebensweise ...

Ingangsetzen und Inganghalten der Aufgabenbearbeitung
Besteht die eingangs erwähnte Beziehung zur Alltags- und Umwelterfahrung der Kinder und weckt die Aufgabe das Interesse der Kinder, kommt es nach dem Stellen der Aufgabe in der Regel rasch dazu, dass die Kinder die Aufgabe bearbeiten. Bei Schwierigkeiten im Handlungsvollzug besteht allerdings immer die Gefahr, dass die Kinder die Handlung kurzerhand abbrechen. Dabei werden der Handlung entgegenstehende affektive Prozesse ausgelöst. Kinder, die sich eben noch hoch motiviert einer Aufgabe zuwandten, erleben, dass sie diese Aufgabe nicht lösen können und wenden sich demotiviert von der sie überfordernden Aufgabe ab. Tritt eine derartige Situation häufiger ein, verfestigen sich Motive, wandeln sich Einstellungen. Aus Kindern, die sich beim Start in Klasse 1 auf das Lernen gerade auch im Fach Mathematik freuten, werden Schüler, die jeder Mathematikstunde mit Furcht und Sorge entgegen sehen.

Gerade hier kann eine Verbindung von Mathematik und Umwelt helfen, können Sachverhalte aus der Umwelt eine anschauliche Stütze des Denkens sein. Verstehen die Kinder den Sachverhalt und können sie dann mit geeigneten Aktivitäten auf der Handlungsebene Zusammenhänge erfahren, Lösungen probieren, versuchen, irren, korrigieren und Bezüge zur Alltags- und Umwelterfahrung herstellen, hilft das die Handlung auch bei Schwierigkeiten in Gang zu halten. Das ist nicht zuletzt deshalb wichtig, weil ein wesentliches Anliegen des Mathematikunterrichts in der ***Entwicklung einer auf erlebten Erfolgen basierenden positiven Einstellung zu mathematikspezifischen Problemen*** (etwa zum Lösen neuer Aufgaben, zu Knobelaufgaben, …) und Arbeitsweisen besteht.

Rückbesinnung auf Lösung und Lösungsweg
Beim Arbeiten mit Aufgaben sollten die Kinder nicht nur die Aufgabe lösen, sondern es sollte stets eine Phase der ***Rückbesinnung auf die Lösung und den Lösungsweg*** stattfinden. Hier werden Beziehungen zwischen Aufgabe, Lösung und den bisherigen Erfahrungen des Lösers, zum Beispiel im Hinblick auf die Frage, ob das Ergebnis von der Größenordnung her den Erwartungen entspricht, hergestellt. Hier spielt auch die Frage eine Rolle, was ein numerisches Ergebnis im Hinblick auf einen Sachverhalt bedeutet. Folgendes Beispiel zeigt, wie wichtig die Interpretation des numerischen Ergebnisses am Sachverhalt ist.

(1) Aus 26 Meter Seil sollen 4 Meter lange Stücke abgeschnitten werden.
(2) 26 Personen wollen mit dem Auto einen Ausflug machen. In jedes Auto passen 4 Personen.
(3) 4 Kinder teilen sich 26 Schokoküsse.

In allen Fällen ist die numerische Beschreibung 26 : 4 = 6 R 2, allerdings ist die Bedeutung des Ergebnisses 6 R 2 sehr unterschiedlich:
(1) Es werden 6 Seilstücke und 2 m Seil bleiben Rest.
(2) Es werden 7 Taxis benötigt.
(3) Jedes Kind bekommt 6 und noch einen halben Schokokuss.

Die klassenöffentliche Diskussion unterschiedlicher ***Lösungswege*** sowie die Beurteilung ihrer Eignung tragen dazu bei, dass sich die Kinder der verschiedenen Strategien und Methoden des Lösens von Sachaufgaben überhaupt erst bewusst werden und es lernen, sie gezielt auszuwählen und einzusetzen: Ob nun Skizzieren, Tabellieren, *systematisches* Probieren, das für die Mathematik charakteristische Zurückführen neuer Aufgaben auf bereits bekannte Aufgaben oder Anderes: Erfolgreich angewandte Arbeitsweisen werden als solche gekennzeichnet, hervorgehoben und immer wieder ausprobiert. Dabei erwerben die Kinder Lösungserfahrungen, die es ihnen erleichtern, neue Aufgaben zu lösen.

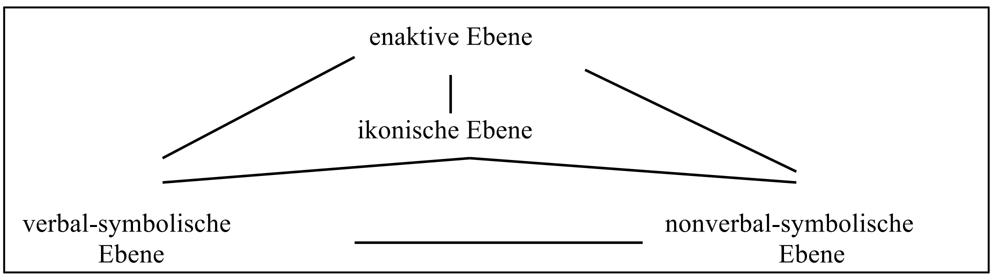
Die folgende Abbildung Verlauf und Resultat als die zwei Seiten des Lernens:

Abbildung 2 – Verlauf und Resultat des Lernens

Wird die Tätigkeit wiederholt ausgeführt, werden also Sachaufgaben wieder und wieder gelöst, kommt es zur Verfestigung und Generalisierung sowohl von Lernverläufen als auch von Resultaten. Dabei entstehen beim Lerner durch Verfestigung der Resultate primär Kenntnisse, durch Verfestigung des Verlaufes primär Fähigkeiten, Fertigkeiten, Gewohnheiten und Einstellungen. Das zeigt die Notwendigkeit, Verlauf und Resultat des Lernens in Einheit zu sehen und insbesondere dem Verlauf des Lernens wesentlich mehr Bedeutung beizumessen, als es häufig noch der Fall ist. Lösungswege zu antizipieren, antizipierend zu diskutieren und rückschauend zu reflektieren ist deshalb für den Unterrichtserfolg wesentlich. Berücksicht werden muss, dass die genannten Entwicklungen Optimismus und Geduld erfordern, weil es Prozesse sind, die sich über Wochen, Monate, ja Jahre erstrecken und die nur stattfinden. wenn entsprechende Tätigkeiten immer wieder vollzogen werden. Das gilt insbesondere auch für die Entwicklung von Fähigkeiten im Lösen von Sachaufgaben. Resultate guter Arbeit sind hier erst langfristig sichtbar.

4 Ebenen des Lernens

Um das Lösen von Sachaufgaben näher zu charakterisieren, ist die Beschreibung des Lernens nach *J. BRUNER* hilfreich. Seiner Theorie zufolge vollzieht sich Lernen auf drei Ebenen:



Auf der ***enaktiven Ebene*** werden gestellte Probleme durch äußere Handlungen probierend, forschend und unter Zuhilfenahme von Materialien gelöst.
Die ***ikonische Ebene*** der bildhaften Darstellung und Vorstellung stellt eine erste Stufe der Verinnerlichung und Abstraktion dar. Die äußere Handlung wird – zunächst sehr realitätsnah, dann mehr und mehr mit vereinfachenden Symbolen – ins Bildhafte übertragen. Kinder können links zwei Enten zeichnen und rechts drei andere Enten und sie erfassen, dass es insgesamt 5 Enten sind. Dabei ist das Zeichnen eine Tätigkeit, die sich an der Handlung mir dem Material orientiert, die daran erinnert. Sich die Situation mit den Enten dann ohne ein Bild vorzustellen, ist eine höhere Anforderung.
Die Handlungen und die Bilder können symbolisch beschrieben werden. Auf der ***verbal-symbolischen*** Ebene ist das eine Geschichte (Zu 2 Enten kommen noch drei Enten hinzu, dann sind insgesamt 5 Enten auf dem Teich) und auf der ***nonverbal-symbolischen Ebene*** ist es eine Zeichenreihe, hier die Gleichung 2 + 3 = 5.
Dabei sind enaktive und ikonische Ebene keine „flüchtigen Durchgangsstadien" auf dem Weg zur symbolischen Ebene sondern grundlegend für deren Verständnis. Bei Schwierigkeiten oder bei Verständnisproblemen in der symbolischen Ebene sollen die Kinder immer wieder auf die enaktive und die ikonische Ebene zurückgreifen können. Es sind deshalb die Übergänge zwischen diesen Ebenen, die das Lernen von Mathematik ausmachen.

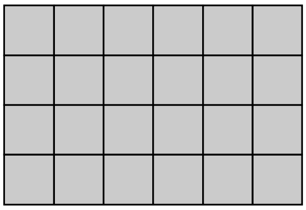
- Eine Handlung beschreiben,
- nach einer Beschreibung eine Handlung auszuführen,
- Zu einer Handlung ein passendes Bild zeichnen,
- entsprechend eines Bildes handeln,
- ein Bild beschreiben,
- zu einer Beschreibung ein Bild anfertigen oder auch ein passendes Bild heraussuchen,
- zu einer Handlung den passenden Term finden,
- zu einem Term passend handeln (zum Beispiel Material legen),
- zu einer Zeichnung bzw. Skizze einen passenden Term angeben,
- zu einem Term eine Skizze anfertigen,
- zu einem Text den passenden Term finden,
- zu einem Term einen passenden Text schreiben,

Mathematische Inhalte zu begreifen bedeutet, diese Übergänge gehen zu können. Diese Fähigkeit ist viel mehr und wertvoller, als nur zu Termen deren Werte berechnen zu können. Das soll nicht heißen, dass Kinder nicht schnell und sicher, also auf Fertigkeitsniveau, rechnen sollen. Aber Terme wie 6 + 8 oder 6 · 8 sind eben nicht in erster Linie Aufforderungen, 14 bzw. 48 zu reproduzieren oder auszurechnen, sondern vielmehr Ausdrücke, welche vielfältige Sachverhalte der Welt mathematisch beschreiben und dadurch überhaupt erst einen Sinn erhalten. Nicht zuletzt: wer weiß, welche Sachverhalte mit 6 · 8 beschrieben werden können, der kann jederzeit den Wert dieses Terms - notfalls durch Legen mit Material - bestimmen.

Mathematik - nicht nur in der Primarstufe - ist Kino im Kopf der Kinder und dieses Kino ist kein Stummfilm.

Konsequenterweise darf beim Erarbeiten ***und auch beim Festigen*** von Gleichungen auf Sachsituationen und deren Verbalisierung nicht verzichtet werden. Im tagtäglichen Unterricht werden nach unserer Beobachtung zuweilen neue Gleichungen recht einseitig aus bekannten Gleichungen gewonnen. So führen die Gleichungen viel zu schnell ein „Eigenleben" ohne Beziehung zu Sachverhalten der Realität.
Gleichungen der Addition und Subtraktion werden in Klasse 1 an vielfältigen Beispielen erarbeitet. Aber schon im Zahlenraum bis 100 wird die Anschauung am Sachverhalt oft recht schnell ausgeblendet, ist dann beispielsweise 30 + 40 zu einseitig nur deshalb 70, weil 3 + 4 = 7 ist.
In Klasse 2 erleben manche Kinder die Multiplikation nur als einen coolen Trick von

Mathematikern, mit dem man lange Summen kürzer schreiben kann: Zu Aufgaben wie 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 sollen die Kinder 6 · 8 schreiben und umgekehrt zu 6 · 8 eine passende Summe schreiben. Die Anschauung in Form *eines Sachverhaltes*, zu dem beide Terme passen, bleibt schnell außen vor.
Wenn Kinder wissen, dass 24 : 6 = 4 ist, weil 4 · 6 = 24 ist, dann ist das Wissen um den Zusammenhang von Aufgabe und Umkehraufgabe zunächst begrüßenswert. Bedenklich ist es, wenn die Kinder nicht ausreichend Sachverhalte kennen lernen, zu denen 24 : 6 passt, an ihnen die Lösung begründen können und wenn sie nicht erleben, dass zu eben diesen Sachverhalten auch 4 · 6 passt. Gerade der Zusammenhang zwischen Aufgabe und Umkehraufgabe sollte *am Sachverhalt* thematisiert werden. Geeignet sind dazu Aufgaben wie:



(4) Erkläre, warum 4 · 6, 6 · 4, 24 : 6 und 24 : 4 zu diesem Bild passen. Erzähle passende Geschichten.

5 Teilhandlungen beim Lösen von Sachaufgaben

Sachaufgaben zu lösen bedeutet, von der verbal-symbolischen Ebene zur nonverbal-symbolischen Ebene zu kommen. Können Kinder diesen Schritt nicht gehen, ist es hilfreich, zunächst in die ikonische Ebene zu gehen, zum Text eine Skizze anzufertigen und dann einen zur Skizze passenden Term zu finden. Analog kann beim Übergang über die enaktive Ebene passend zum Text gehandelt, kann die Sachsituation nachgespielt, nachgelegt werden.

Generell ist es effektiv und lohnenswert, Teilhandlungen beim Lösen von Sachaufgaben systematisch im Unterricht zu entwickeln. Derartigen Teilhandlungen sind:

- den Sinn von Texten, den Sachverhalt und das Problem erfassen
  dazu den Sachverhalt eventuell nachstellen bzw. nachspielen
- den Sachverhalt mit eigenen Worten beschreiben
- Probleme beschreiben und zum Sachverhalt eine sinnvolle Frage stellen
- eine vorgegebene Frage erfassen
- Texten gezielt Daten entnehmen, wichtige Angaben unterstreichen oder herausschreiben, hinsichtlich einer Frage wesentliche Angaben finden
- erkennen von Signalwörtern in Sinneinheiten
- zu Texten Skizzen anfertigen,
- zu Skizzen passende Texte finden,
- zu Skizzen passende Terme finden,
- zu Termen passende Skizzen finden,
- Texte und Terme einander zuordnen,
- Tabellen lesen / Tabellen anfertigen,
- Lesen und Anfertigen von Diagrammen
- systematisch Probieren,
- Resultate und Sachverhalt in Beziehung setzen und dabei realistische Größenvorstellungen nutzen

Skizzen
Insbesondere Skizzen können eine wirksame Hilfe beim Lösen von Sachaufgaben sein. Skizzen veranschaulichen den Sachverhalt, zeigen die Beziehung zwischen gegebenem und Gesuchtem auf.
Skizzieren bedeutet immer eine Konzentration auf Wesentliches und damit bereits eine erste Abstraktion. Ausgehend von der Skizze fällt es dann oft leichter, einen passenden Term oder eine passende Gleichung zu einem Text zu finden.
Deshalb sollte die Fähigkeit zum Arbeiten mit Skizzen, die viel mehr ist als nur das Skizzieren, im Unterricht systematisch entwickelt werden.
Das betrifft zum einen die ***handwerklich-praktische Seite***. Skizzieren „frei Hand“ vermag der Schnelligkeit des Denkens besser zu folgen als Zeichnen mit dem Lineal. Dementsprechende Fähigkeiten und Fertigkeiten im Arbeiten „frei Hand“ sollten von Klasse 1 an – zum Beispiel auch beim Arbeiten am leeren Zahlenstrahl (dem so genannten Rechenstrich) – entwickelt werden.

Zum anderen betrifft das den ***gedanklich-theoretischen Aspekt***:
- Was muss in der Skizze dargestellt werden?
- Welche Art von Skizze ist dazu günstig?
- Wie exakt und genau muss das im Text Gegebene dargestellt werden?
- Welche Zusammenhänge bestehen zwischen Gegebenem und Gesuchtem?
- Wo wird der Zusammenhang zwischen Gegebenem und Gesuchtem an der Skizze deutlich?

Als Hilfe für die Kinder können folgende Impulse beispielsweise auf einem Poster notiert werden. Wirksam werden sie erst dann, wenn Kinder sie gewohnheitsmäßig nutzen. Das setzt voraus, dass die Kinder die Nützlichkeit dieser Hinweise *erleben*.

- **Kennzeichne wichtige Angaben im Text.**
- **Überlege, was du zeichnen kannst.**
- **Stelle Personen und Dinge so einfach wie möglich dar.**
- **Schreibe alle bekannten Informationen an die Skizze.**
- **Markiere das Gesuchte farbig.**
- **Wie hängt das Gesuchte mit dem Gegebenen zusammen? Schreibe eine passende Aufgabe.**

Den Nutzen von Skizzen erleben
Gute Beispiele lassen die Kinder Skizzen subjektiv als nützliche Lösungswerkzeuge erleben und fördern die Gewohnheit, Sachverhalte mittels Skizzen zu veranschaulichen. Einige schöne Beispiele sind diese:

(5) *Vor dem 50-m-Lauf stellen sich alle Kinder am Start in Dreierreihen auf. Magdalena steht genau in der Mitte. Sie steht in der zehnten Reihe von vorn und in der zehnten Reihe von hinten. Wie viele Kinder sind am Start?*

(6) *Beim Wettrennen überholt Lucia kurz vor dem Ziel Mia, die an zweiter Stelle liegt. An welcher Stelle liegt Lucia nun?*

(7) *Eine 80 m lange Telegrafenleitung wird verlegt. Alle 10 m steht ein Mast. Wie viele Masten werden benötigt?*

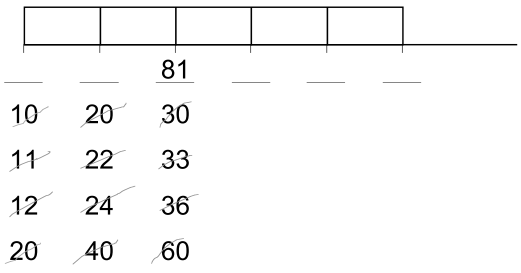
Die Kinder neigen hier erfahrungsgemäß zu schnellen und falschen Antworten: Es sind 60 Kinder. Lucia ist an erster Stelle. Es werden 8 Masten gebraucht. Erst die Skizze zeigt den Trugschluss: Die zehnte Reihe von vorn ist ja zugleich die zehnte Reihe von hinten. Auch wenn Lucia die Mia überholt, liegt vor ihr immer noch die erste Läuferin. Das Ende der Telegrafenleitung kann nicht in der Luft schweben.
Den Wert von Skizzen erleben die Kinder auch dann, wenn Skizzen ein Medium zum Probieren und zum unmittelbaren Lösen von Sachaufgaben sind, welches Terme oder Gleichungen erübrigt. Die Arbeit mit Skizzen bietet dann eine wunderbare Gelegenheit, bei der die Kinder das Probieren, Irren und Korrigieren
- als normal beim Lösen von Aufgaben und
- als normal beim Lernen von Mathematik

erleben können:

(8) Die Tischlerei liefert Tische mit 3 und Tische mit 4 Beinen aus. Am Freitag verlassen 5 Tischplatten und 17 Tischbeine die Firma. Wie viele Tische von jeder Sorte sind das?

Hier können die Kinder zunächst 5 Tischplatten skizzieren, an jede Tischplatte 3 Beine zeichnen und anschließend die beiden übrig gebliebenen Beine an zwei der Tische anfügen.

(9) 3 Ziegelsteine sind 81 cm lang. Wie lang sind 5 Ziegelsteine?



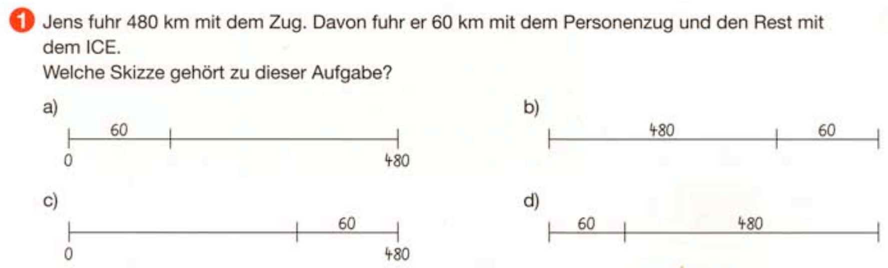
Hier können die Kinder an der Skizze probieren und eventuelle Irrtümer selbst korrigieren.

Teilhandlungen beim Arbeiten mit Skizzen
Wie jede komplexe Handlung kann auch das Arbeiten mit Skizzen in Teilhandlungen zerlegt werden. Das ist zum einen die Übersetzung Text – Skizze und zum anderen die Übersetzung Skizze – Term bzw. Gleichung. Dabei spielen die folgenden Aufgaben eine Rolle. Sie sollten immer wieder gezielt gefestigt werden.

I. Skizze und Text einander zuordnen

(a) Gegeben sind ein Text und mehrere Skizzen. Die Kinder sollen herausfinden, welche der Skizzen zum Text passt. Hier lernen die Kinder zugleich Skizzen in der Vielfalt ihrer Formen kennen.

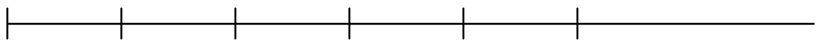
(10)


1 Jens fuhr 480 km mit dem Zug. Davon fuhr er 60 km mit dem Personenzug und den Rest mit dem ICE.
Welche Skizze gehört zu dieser Aufgabe?

(aus: Denken und Rechnen – Ausgabe A, Klasse 3, S.65)

(b) Gegeben sind ein Text und eine angefangene Skizze. Die Skizze ist passend zum Text zu vervollständigen.

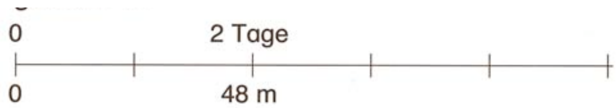
(11) Beschrifte die Skizze passend.
Ein LKW fährt auf der Autobahn und legt ohne Pause in 3 Stunden 240 km zurück. Wie viel schafft er in 5 Stunden?



(c) Eine Skizze ist vorgegeben. Die Kinder sollen dazu einen passenden Text schreiben.

Weil Kinder anfangs oft nicht auf passende Ideen kommen, ist es hilfreich, zunächst die Skizze und einen angefangenen Text vorzugeben, den die Kinder vervollständigen müssen.

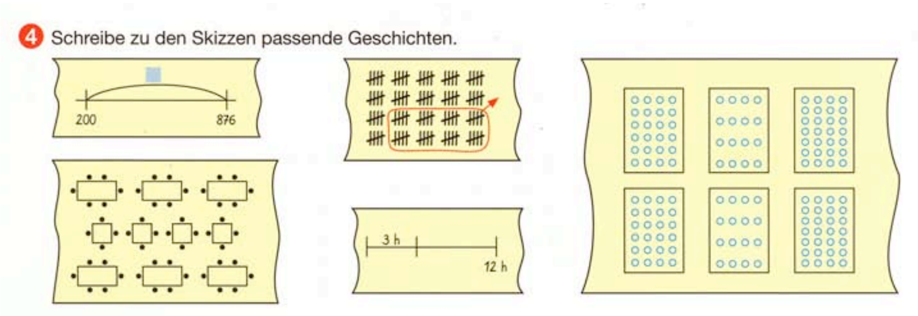
(12) Erzähle weiter und vervollständige die Skizze.
An 2 Tagen wurden 48 m Radweg gebaut. ...



(aus: Mathematikus, Klasse 2)

oder

(13) Schreibe zu den Skizzen passende Geschichten



(aus: Denken und Rechnen, Ausgabe A, Klasse 3, S.65)

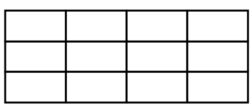
(d) Zu einem Text eine Skizze anfertigen.

(14) Erzähle weiter. Zeichne passende Skizzen.
In vier Stunden fährt der Lieferwagen 200 km ...
oder
Drei Eis am Stiel kosten 2,10 €....
(aus: Mathematikus)

II. Skizze und Term bzw. Gleichung einander zuordnen

(a) Begründen, warum ein Term zu einer vorgegebenen Abbildung (zu einer Skizze) passt:

(15) Erkläre, warum die Aufgaben 4 · 3, 3 · 4, 12 : 3 und 12 : 4 zu diesem Bild passen. Erzähle passende Geschichten.



(16) Erkläre, warum die Aufgaben ... zu diesem Bild passen. Erzähle passende Geschichten.

Dabei eine Abbildung und einen Term vorgeben

(b) Gegeben ist ein Term. Zu ihm soll unter vorgegebenen Skizzen eine passende herausgesucht werden.

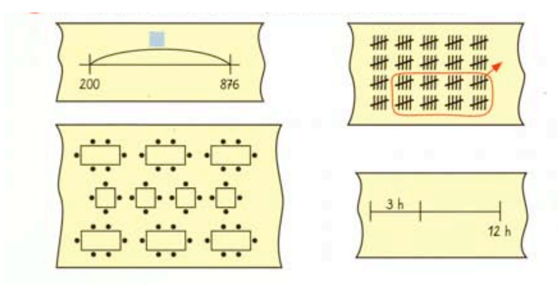
(17) Welche Bilder passen zu 4 · 3. Erkläre.

(c) Eine Skizze ist so abändern, dass sie zu einem vorgegebenen Term passt.

(18) Ändere die Bilder so ab, dass sie zur Aufgabe passen.

(aus: Denken und Rechnen – Ausgabe A, Klasse 2)

(d) Zu einer Skizze soll unter mehreren Termen der passende herausgesucht werden.
(19) Welche Aufgaben passen zu welcher Skizze. Erkläre.



200 + ____ = 876
12h - 3h
3h + 12h
200 + 876
6 · 6 + 4 · 4
20 – 8
876 – 200
100 – 40
6 + 4
3h + ____ = 12h

(e) Zu einer Skizze ist ein passender Term bzw. eine passende Gleichung anzugeben. Hier kann jede gängige Skizze in einem Buch genutzt werden. Die Kinder können feststellen, welche Terme bzw. Gleichungen dazu passen.

Fazit

Schwierigkeiten der Kinder beim Lösen von Sachaufgaben sind zu oft ein prinzipielles Problem der Unterrichtskultur. Sie werden immer wieder dort auftreten, wo sich der Mathematikunterricht vor allem und zu einseitig in der nonverbal-symbolischen Ebene abspielt. Das Anwenden mathematischen Wissens und Könnens etwa beim Lösen von Sachaufgaben sollte mehr im Mittelpunkt des Unterrichts stehen. Dabei soll das Anwenden nicht etwa sein, was nach dem Erarbeiten Neuen Stoffes erfolgt. Vielmehr sollte die Anwendung von der Erarbeitung des Neuen an im Mittelpunkt stehen, sollten Sachkontexte die Erarbeitung neuen Stoffes motivieren. Generell sollte der durchgängigen Arbeit mit Sachsituationen wesentlich mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden.
Ein Blick in verbreitete Schulbücher – die ja die Bedürfnisse eines Massenmarktes bedienen – lässt vermuten, dass im Unterricht das Schwergewicht zu einseitig auf dem verbreiteten Rechnen von Päckchen liegt, dass also die zu beobachtenden Schwierigkeiten beim Sachrechnen nicht von ungefähr kommen.

Lohnenswert und effektiv ist es, gezielt Methoden zum Lösen von Sachaufgaben zu trainieren. So, wie es hier exemplarisch für das Arbeiten mit Skizzen gezeigt wurde, sollten immer wieder die genannten Teilhandlungen beim Lösen von Sachaufgaben gefestigt werden.

Speziell Skizzen können nur dann beim Lösen von Sachaufgaben hilfreich sein, wenn
- die Kinder die Vielfalt der Skizzen kennen, also wissen, wie unterschiedlich Skizzen aussehen können, wie man sie beschriften kann usw.,
- sie es gewohnt sind, an und mit Skizzen zu probieren und wenn
- sie den Übergang vom Text zur Skizze sowie von der Skizze zum Term in beide Richtungen gehen können.

Auch dabei ist es hilfreich, Teilhandlungen wie aufgezeigt gezielt zu festigen.

Nicht zuletzt sollte beachtet werden, dass Können im Lösen von Sachaufgaben von den Kindern langfristig erworben wird, dass es langfristig angelegter, planmäßiger und systematischer Arbeit bedarf. Wir wünschen dem Leser und den Kindern dabei Optimismus, Konsequenz, Geduld und vor allem Erfolg.

Literatur:

Eichler, K.-P: Probleme beim Sachrechnen sind ein Problem des Mathematikunterrichts. – In: Grundschule 9/2008
Eichler, K.-P: Skizzen als Hilfen beim Lösen von Sachaufgaben. – In: Praxis Grundschule 5/2008
Eichler, K.-P. (Herausgeber): Denken und Rechnen – A Klasse 2. – Braunschweig: Westermann, 2004
Eichler, K.-P. (Herausgeber): Denken und Rechnen – A Klasse 3. – Braunschweig: Westermann, 2005
Eichler, K.-P. (Herausgeber): Denken und Rechnen – A Klasse 4. – Braunschweig: Westermann, 2005
Fanghänel, G.: Arbeiten mit Aufgaben – ein wesentliches Mittel zur Gestaltung eines modernen Mathematikunterrichts. – In: Mathematikunterricht gestalten. – Berlin: Paetec 2000
Franke, M.: Didaktik des Sachrechnens
Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe. - Stuttgart: Klett, 1979
Lorenz, J. H. (Herausgeber): Mathematikus Klasse 2. – Braunschweig: Westermann, 2007
Lorenz, J. H. (Herausgeber): Mathematikus Klasse 3. – Braunschweig: Westermann, 2008
Lorenz, J. H. (Herausgeber): Mathematikus Klasse 4. – Braunschweig: Westermann, 2008