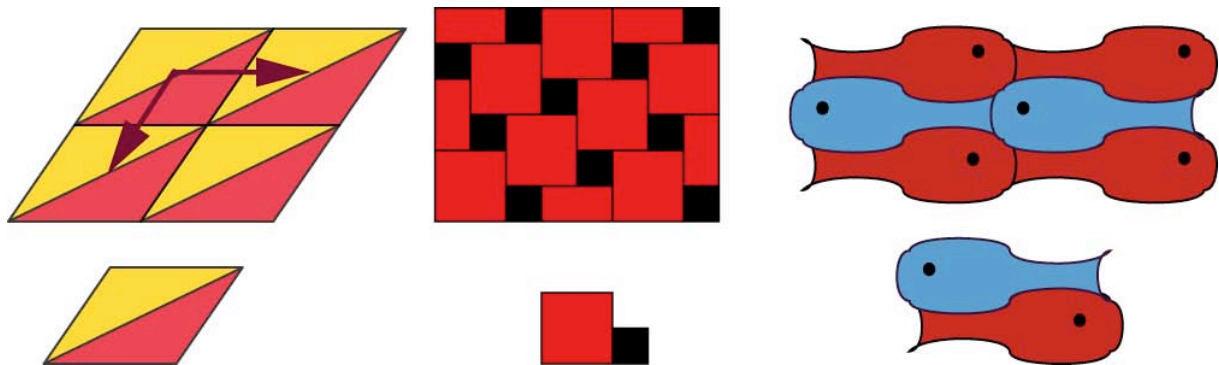


1 Parkett - fachliche Grundlagen

1.1 Zum Begriff „Parkett“

Tagtäglich begegnen sie uns auf unseren Wegen: Parkette als periodische, lückenlose und überlappungsfreie Bedeckung der gesamten Ebene mit Parkettsteinen.

Periodizität bedeutet, dass es mindestens zwei nicht parallele Geraden gibt, längs derer das (gesamte!) Parkett verschoben und wieder auf sich selbst abgebildet werden kann. Es gibt damit eine Ausgangsfigur (die so genannte translative Zelle), durch deren Verschiebung das gesamte Parkett erzeugt werden kann. Diese Ausgangsfigur selbst kann aus einem oder auch mehrere Parkettsteinen bestehen:



Die Abbildung zeigt drei Parkette und darunter jeweils die sie erzeugende Ausgangsfigur. Die Pfeile deuten zwei mögliche Verschiebungsrichtungen an. Liegt diese Periodizität nicht vor, spricht man nicht von einem Parkett, sondern von einem Mosaik. Ein Beispiel für eine Mosaikpflasterung ist die

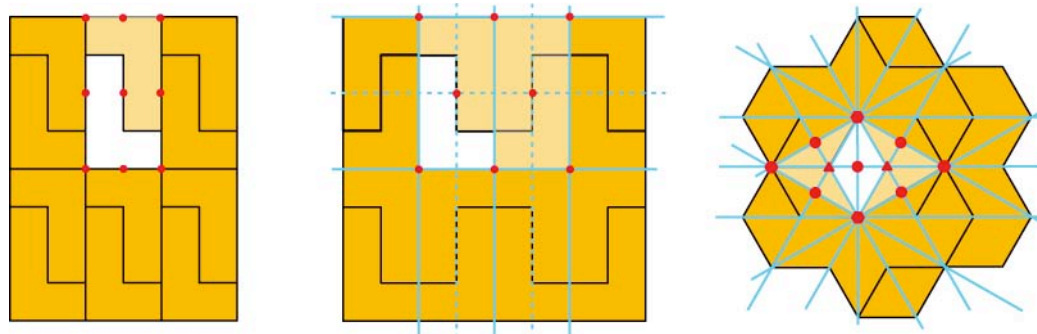


abgebildete so genannte *Golombische Sphinx*. Aus sechzehn der kleinen „Sphinxfünfecke“ kann – ohne Periodizität - eine größere Sphinx zusammengesetzt werden. Aus sechzehn größeren wiederum eine noch größere usw. Damit kann die gesamte Ebene nichtperiodisch bedeckt werden.

Man kann Parkette danach untersuchen und klassifizieren, welche Abbildungen das Parkett auf sich selbst abbilden. Folgenden Typen von Abbildungen treten auf:

- T Translation (tritt definitionsgemäß bei allen Parketten auf)
- C Halbdrehung um 180° (die Punktspiegelung, Zentren sind als Punkte markiert)
- C_3 Drittelrotation um 120° (Zentren sind in der Abbildung als rote Dreiecke markiert)
- C_4 Vierteldrehung um 90°
- C_6 Sechsteldrehung um 60° (Zentren sind in der Abbildung als rote Sechsecke markiert)
- S Achsenspiegelung (in der Abbildung die blauen Linien)
- G Gleitspiegelung (auch Schubspiegelung genannt, eine Kombination aus Translation und Achsenspiegelung, in der Abbildung durch die gestrichelten Linien verdeutlicht)

In vielen Parketten kommen mehrere dieser Abbildungen vor:

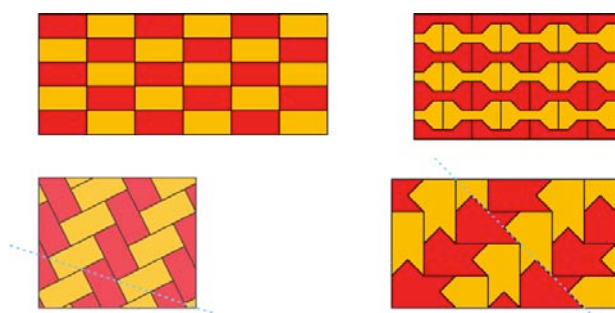


Um herauszufinden, welche Symmetrieabbildung ein Parkett beinhaltet, untersucht man zunächst den Ausgangsstein und die translative Zelle auf Symmetrie. Dann geht man den Rand der translativen Zelle ab und sucht für jede Seite und Ecke alle Symmetrieabbildung, welche die translative Zelle ohne Überlappungen von Parkettsteinen auf ihre unmittelbare Umgebung abbilden.

In den drei abgebildeten Parketten ist jeweils dargestellt, mit welcher Abbildung der weiße Parkettstein und die aus ihm und den helleren Steinen bestehende translative Zelle auf die Umgebung abgebildet werden kann. Im linken Parkett sind das Drehungen um 180° (Punktspiegelungen an den rot markierten Punkten). Im mittleren Parkett sind es neben Punktspiegelungen auch Spiegelungen an den markierten Achsen und Schubspiegelungen an den gestrichelt markierten Geraden. Im rechten Parkett sind Drehungen um 60° , um 120° , um 180° sowie Spiegelungen und Schubspiegelungen enthalten.

1.2 Einfache Parkette

Parkette, die aus genau einer Sorte von Parkettsteinen bestehen, nennt man **einfache Parkette**. Die Abbildung zeigt vier einfache Parkette.



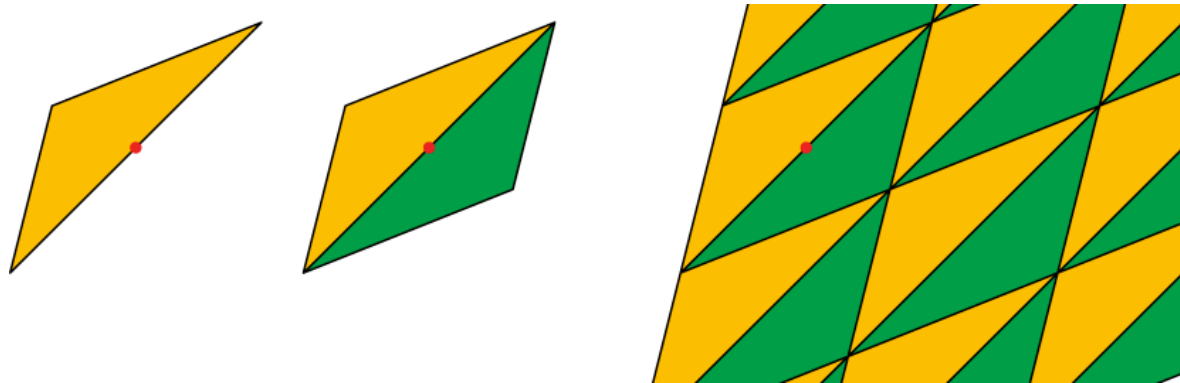
In den Parketten in der oberen Reihe aus Rechtecken und aus 12-Ecken kann jeder Parkettstein mittels Punktspiegelung oder Verschiebung auf jeden anderen Parkettstein abgebildet werden.

In den Parketten in der unteren Reihe kann jeder gelbe Parkettstein auf jeden anderen gelben Parkettstein mit einer Verschiebung abgebildet werden. Soll ein gelber auf einen roten Parkettstein abgebildet werden, ist dazu eine Schubspiegelung erforderlich: Beispielsweise die Verschiebung längs der eingezeichneten gestrichelten Linie und dann die Spiegelung an dieser.

Beim Abbilden eines Parkettsteins auf einen anderen Parkettstein werden zugleich auch alle anderen Parkettsteine wieder exakt auf einen Parkettstein – und nicht etwa zwei Parkettsteine überlappend – abgebildet.

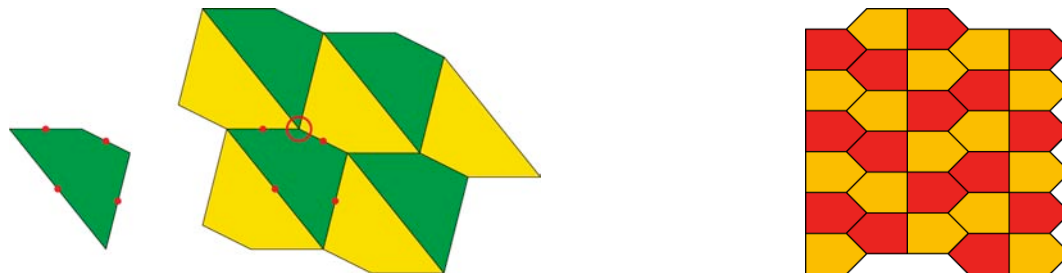
Interessant ist die Frage, aus welchen Figuren einfache Parkette hergestellt werden können. Die Abbildung zeigt, dass aus jedem Dreieck ein einfaches Parkett hergestellt werden kann. Mit einer

Punktspiegelung kann so wie in der Abbildung das Dreieck zum Parallelogramm ergänzt werden. Mit diesem Parallelogramm ist die Ebene lückenlos ausfüllbar.



Die Abbildung verdeutlicht zugleich, dass aus jedem Parallelogramm und damit aus jedem Rechteck und erst recht aus jedem Quadrat ein einfaches Parkett hergestellt werden kann.

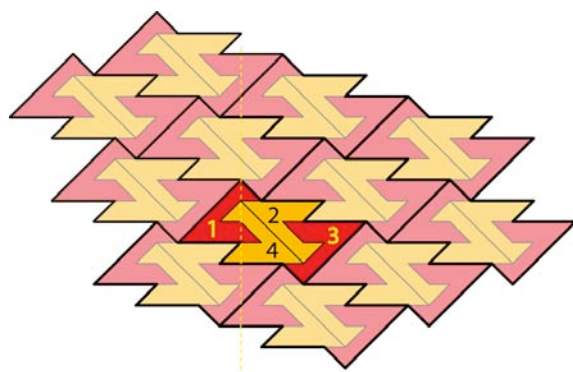
Auch mit einem beliebigen unregelmäßigen Viereck als Parkettstein kann die Ebene lückenlos parkettiert werden:



Spiegelt man das grüne Viereck an seinen Seitenmittelpunkten (Drehungen um 180°), so wird die Ebene lückenlos bedeckt: In jeder Ecke des Parketts treffen sich dann immer alle vier Ecken des Vierecks. Weil die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt, ist die Parkettierung lückenlos.

Auch mit einigen Fünfecken können einfache Parkette hergestellt werden:

Man könnte nach diesen Beispielen annehmen, dass jede Überdeckung der Ebene mit Steinen einer Sorte eine einfache Parkettierung ist. Die folgende Abbildung zeigt eine Überdeckung der Ebene mit Siebenecken, die so beschaffen ist, dass beim



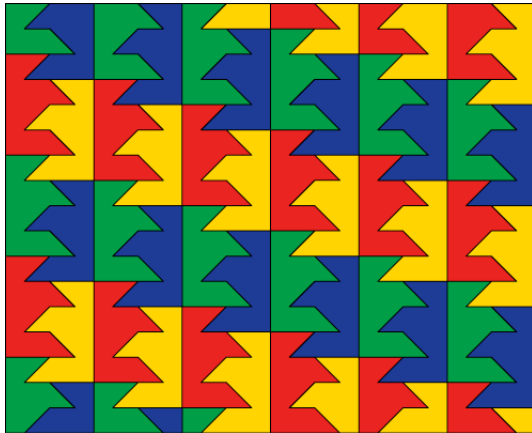
Abbilden eines Siebenecks auf ein anderes Siebeneck andere Steine nicht exakt aufeinander, sondern überlappend abgebildet werden:

Wenn man beispielsweise das Siebeneck mit der Nummer 1 auf die Nummer 4 abbildet, ist dazu eine Schubspiegelung erforderlich. Bei dieser Schubspiegelung an der gestrichelt markierten

Geraden fällt das Bild von Siebeneck Nummer 3 mit keinem anderen Siebeneck zusammen. Wären die Siebenecke 1 und 4 insgesamt eine einzige Figur, dann würde dieses große Siebeneck eine einfache

Parkettierung liefern. Ebenso würde eine einfache Parkettierung vorliegen, wenn die Steine 1 bis 4 eine Einheit wären: Dieses Zehneck parkettiert ebenfalls.

Ähnlich ist es in folgender Pflasterung: Wird dort ein roter Stein auf einen gelben Stein abgebildet, ist

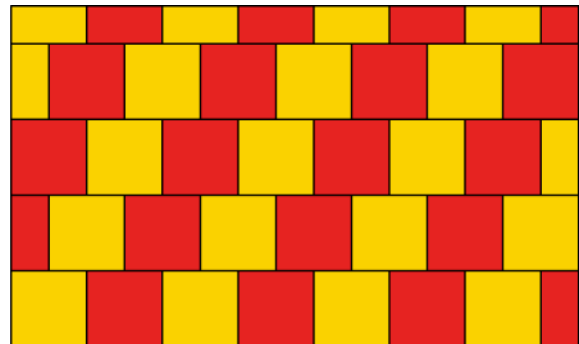
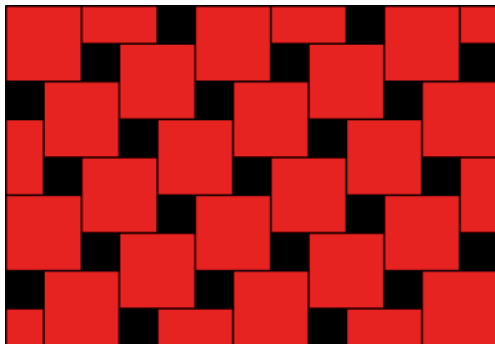


dazu eine Achsenspiegelung oder eine Schubspiegelung erforderlich. In beiden Fällen gibt es dann andere Parkettsteine, deren Bild nicht mit einem Parkettstein zusammenfällt, sondern mehrere Parkettsteine überlappt.

Nach ihrem Entdecker HEINRICH HEESCH (1906 – 1995) werden derartige Steine bzw. Parkette HEESCH-STEINE bzw. HEESCH-PARKETTE (obwohl es streng genommen keine Parkette sind) genannt.

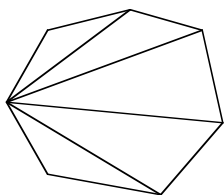
1.3 Platonische Parkette

Sonderfälle der einfachen Parkette sind PLATONISCHE Parkette. PLATONISCHE Parkette bestehen aus genau einer Sorte gleich großer regelmäßiger n -Ecke. Dabei muss jede Seite eines Vielecks Seite eines anderen Vielecks sein, d.h. nirgends trifft eine Ecke auf eine Seite.



Die Abbildung oben zeigt zwei Parkette, die nicht platonisch sind. Das erste Parkett besteht zwar nur aus Quadraten, ist aber kein platonisches Parkett, weil die Quadrate verschiedene Seitenlängen haben. Im zweiten Parkett haben zwar alle Quadrate gleiche Seitenlängen, es ist dort aber nicht jede Seite eines Quadrates zugleich Seite des benachbarten Quadrates.

Um herauszufinden, welche PLATONISCHEN Parkette es gibt, betrachten wir die Innenwinkelgröße im regelmäßigen n -Eck:



So wie im Bild durch alle Diagonalen von einem Punkt aus das Siebeneck in 5 Dreiecke zerlegt wird, kann allgemein jedes n -Eck in $n - 2$ Dreiecke zerlegt werden. Damit beträgt die Winkelsumme im n -Eck stets $(n - 2) \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ - 360^\circ$

Im regelmäßigen n -Eck verteilt sich diese Winkelsumme gleichmäßig auf die n Innenwinkel. Für die Größe α_n eines jeden dieser n Innenwinkel gilt dann:

$$\alpha_n = \frac{n \cdot 180^\circ - 360^\circ}{n}$$

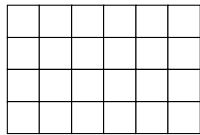
$$\alpha_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Die folgende Tabelle zeigt die Innenwinkelgrößen ausgewählter regelmäßiger n -Ecke:

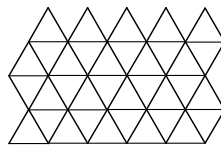
n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
α_n	60°	90°	108°	120°	$128,6^\circ$	135°	140°	144°	$147,3^\circ$	150°	$152,3^\circ$	$154,3^\circ$	156°

Werden beim Parkettieren als Parkettsteine nur regelmäßige n -Ecke einer Sorte benutzt, stoßen in jeder Ecke des Parketts k Stück gleiche n -Ecke zusammen. Also gilt dann $k \cdot \alpha_n = 360^\circ$, wobei k mindestens 3 sein muss. (An einer Ecke treffen sich immer mindestens drei Stück n -Ecke.)

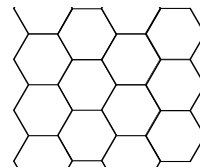
Hier gibt es nur folgende 3 Lösungen:



$$3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$$



$$4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$$



$$6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$$

Mit der Gleichung $k \cdot \alpha_n = 360^\circ$ wird klar, was Kinder bereits beim Zeichnen mit einer Schablone entdecken: Mit regelmäßigen Fünfecken kann nicht parkettiert werden kann, weil 360° kein Vielfaches von 108° ist.

1.4 Archimedische Parkette

1.4.1 Zum Begriff

Ein Parkett nennt man archimedisch, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- Es enthält mehr als eine Sorte regelmäßiger Polygone
- Es trifft nie eine Ecke auf eine Seite (insbesondere sind alle Seiten gleich lang)
- Alle Ecken sind vom gleichen Typ, das heißt in jeder Ecke findet sich die gleiche Konstellation zusammentreffender Vielecke.

Nachfolgend werden zwei Wege gezeigt, alle archimedischen Parkette zu bestimmen.

1.4.2 Systematische Ermittlung aller ARCHIMEDISCHEN Parkette mittels einer Tabelle

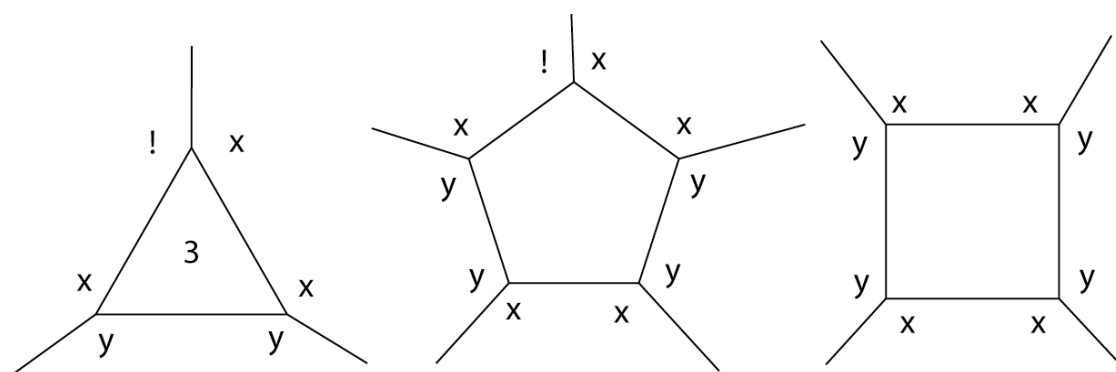
Mit obiger Tabelle wird zunächst deutlich, dass in jeder Ecke des Parketts höchstens 3 verschiedene Sorten von Vielecken aufeinander treffen können. Angenommen, es wären auch vier verschiedene Sorten von n -Ecken möglich: Die vier n -Ecke mit den kleinsten Innenwinkeln sind Dreieck, Viereck, Fünfeck und Sechseck. Aber schon die Summe der Innenwinkel dieser vier n -Ecke ist größer als 360° :

$$\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 60^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ = 378^\circ > 360^\circ$$

Mit der folgenden Tabelle können durch systematisches Probieren alle ARCHIMEDISCHEN Parkette gefunden werden. Es wird in jede Zeile eingetragen, wie viele n -Ecke der betreffenden Sorte sich an einer Parkettecke treffen sollen. Die Summe der Winkel aller Parkettsteine muss in jeder Ecke 360° ergeben. Dabei treffen sich in jeder Ecke des Parketts mindestens 3 und höchstens 5 Parkettsteine.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
α_n	60°	90°	108°	120°	128,6°	135°	140°	144°	147,3°	150°	152,3	154,3	156°
(A1)	1									2			
(A2)		1		1						1			
(A3)		1				2							
(A4)				3									

- (A) Treffen in jeder Ecke des Parketts genau **drei Parkettsteine** zusammen, dann müssen bei *ungerader Eckenzahl eines dieser Parkettsteine* die beiden anderen Parkettsteine die gleiche Eckenzahl haben. Die folgende Skizze verdeutlicht das für den Fall, dass ein Parkettstein einerseits ein Dreieck oder ein Fünfeck und andererseits ein Viereck ist:



Wandert man um das Dreieck (bzw. um das Fünfeck) herum, dann treffen in jeder Ecke ein Dreieck (bzw. ein Fünfeck), ein x -Eck und ein y -Eck zusammen. Wird Ecke für Ecke beschriftet, dann muss an der Stelle, an der das Ausrufezeichen steht, sowohl ein x (weil die Stelle zur Fläche des x -Ecks gehört) als auch ein y (weil an der Ecke schon ein anderes x -Eck antrifft) stehen. Also muss x gleich y sein!

Beim Viereck und bei jedem anderen n-Eck mit gerader Eckenzahl können x und y verschieden sein.

Für das Dreieck existiert deshalb nur die Lösung A1, für das Fünfeck existiert keine Lösung.

Für das Viereck ergeben sich durch systematisches Probieren die Lösungen A2 und A3, für das Sechseck die Lösung A4, ein Platonisches Parkett.

(B) Treffen in jeder Ecke des Parketts **vier Parkettsteine** oder **fünf Parkettsteine** zusammen, dann kann man mit ähnlichen Überlegungen systematisch probierend herausfinden, dass sich in jeder Ecke des Parketts

(B1) 2 Dreiecke und 2 Sechsecke

(B2) 1 Dreieck, 2 Quadrate und 1 Sechseck,

(B3) 4 Dreiecke und 1 Sechseck

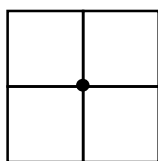
(B4) 3 Dreiecke und 2 Quadrate

treffen.

Skizziert man diese Parkettierungen, wird deutlich, dass (B1) nur dann ein archimedisches Parkett ergibt, wenn die beiden Dreiecke nicht nebeneinander liegen. Auch (B2) ergibt nur dann ein archimedisches Parkett, wenn die beiden Quadrate nicht nebeneinander liegen. Zu (B4) gibt es **zwei verschiedene Parkette**: Bei einem Parkett haben die beiden Quadrate eine gemeinsame Seite, beim anderen Parkett haben sie keine gemeinsame Seite, liegt zwischen ihnen immer noch ein Dreieck.

1.4.3 Berechnung aller Möglichkeiten Archimedischer Parkette

Stoßen in einer Ecke des Parketts verschiedene Vielecke zusammen, kann man die Ecke danach klassifizieren, welche Vielecke dort zusammenstoßen.



Beispielsweise ist die markierte Ecke eine (4, 4, 4, 4) - Ecke.

Stoßen nun in jeder Ecke **3 regelmäßige Vielecke** (ein k-Eck, ein l-Eck und ein m-Eck) zusammen, gilt für die Winkel

$$\frac{(k-2) \cdot 180^0}{k} + \frac{(l-2) \cdot 180^0}{l} + \frac{(m-2) \cdot 180^0}{m} = 360^0$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$$

wobei $k, l, m \geq 3$

Lösungen dieser Gleichung sind folgende Tripel (Lösen durch systematisches Probieren,

man setzt zuerst $k = 3$ und sucht Lösungen für l und m . Dann setzte man $k = 4 \dots$):

(3; 7; 42) (3, 8, 24) (3, 9, 18) (3, 10, 15) (3, 12, 12)
 (4, 5, 20) (4, 6, 12) (4, 8, 8) (5, 5, 10) (6, 6, 6)

Untersuchen wir, welche dieser Kombinationen auch als Parkett auch realisierbar sind:

Wie bereits im Abschnitt 1.4.2 gezeigt wurde, müssen immer dann, wenn einer der drei Parkettsteine eine ungerade Eckenzahl hat, die beiden anderen Parkettsteine die gleiche Eckenzahl haben. Damit verbleiben als Lösung die Tripel:

(3; 12; 12) **(4, 6, 12)** **(4; 8; 8)** **(6; 6; 6)**

wobei (6; 6; 6) ein platonisches Parkett liefert.

Falls sich **4 Parkettsteine** mit k, l, m und n Ecken in einer Parkettecke treffen, gilt die Gleichung

$$\frac{(k-2) \cdot 180^0}{k} + \frac{(l-2) \cdot 180^0}{l} + \frac{(m-2) \cdot 180^0}{m} + \frac{(n-2) \cdot 180^0}{n} = 360^0$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind:

(3; 3; 4; 12) (3; 3; 6; 6) (3, 4; 3; 12) (3; 4; 4; 6)
 (3; 4; 6; 4) (3; 6; 3; 6) (4; 4; 4; 4)

Analoge Betrachtungen der Ecken rund um ein Dreieck zeigen, dass nur die Ecktypen

(3; 6; 3; 6), **(3; 4; 6; 4)** und **(4; 4; 4; 4)** ein Parkett liefern, wobei das Parkett (4; 4; 4; 4) ein platonisches Parkett liefert.

Falls sich **5 Parkettsteine** mit k, l, m, n und p Ecken in einer Parkettecke treffen, gilt die Gleichung

$$\frac{(k-2) \cdot 180^0}{k} + \frac{(l-2) \cdot 180^0}{l} + \frac{(m-2) \cdot 180^0}{m} + \frac{(n-2) \cdot 180^0}{n} + \frac{(p-2) \cdot 180^0}{p} = 360^0$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1,5$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind:

(3; 3; 3; 3; 12) **(3; 3; 3; 4; 4)** **(3, 3; 4; 3; 4)**

Alle drei Lösungen führen zu einer Parkettierung.

Falls sich **6 Parkettsteine** in einer Parkettecke treffen, müssen alle 6 Steine gleichseitige Dreiecke sein. Dann sind alle Ecken vom Typ **(3; 3; 3; 3; 3; 3)**, es liegt ein platonisches Parkett vor.

Damit gibt es insgesamt folgende **8 Archimedischen Parkette**:

(3; 12; 12) **(4, 6, 12)** **(4; 8; 8)** **(3; 6; 3; 6)**
(3; 4; 6; 4) **(3; 3; 3; 3; 12)** **(3; 3; 3; 4; 4)** **(3, 3; 4; 3; 4)**

1.5 Nichtperiodische Pflasterungen der Ebene

Neben den Parketten gibt es eine Reihe von nichtperiodischen Pflasterungen der Ebene. Die wohl berühmteste derartige Pflasterung ist die von Roger PENROSE 1973 gefundene¹.

2 Zur Arbeit mit Parketten aus didaktischer Sicht

2.1 Chance zur Aneignung mathematischer Inhalte

Die Auseinandersetzung mit Parketten ist hervorragend geeignet, den Mathematikunterricht aus der Kindperspektive zu gestalten und dabei die Alltags- und Umwelterfahrungen der Kinder einzubeziehen. Die Arbeit an Parketten leistet nicht nur einen Beitrag zur Umwelterschließung. Spielerische Aktivitäten und äußere Handlungen wie Legen, Färben, Drucken usw. tragen dazu bei, dass die Kinder hier altersgerecht aneignen können. Parkette können den Kindern Anlass, Anschauung und Anwendungsfeld für sehr vielfältige mathematische Inhalte und Aktivitäten sein. Aus inhaltlicher Sicht betrifft das

- Überlegungen zur Form der Parkettsteine, ihre Untersuchung und Klassifizierung,
- Überlegungen inwieweit bestimmte Figuren allein oder in Kombination mit anderen Figuren parkettieren,
- Überlegungen zum Messen von Längen, Flächen und Winkeln der mit Parkettsteinen auszuliegenden Figur,
- Experimentell gewonnene Vorerfahrungen zu Summen von Winkeln wenn beispielsweise mit Dreiecken einer Sorte oder mit Vierecken einer Sorte parkettiert wird,
- Überlegungen zum Vergleichen und Messen bezogen auf den Parkettstein selbst, auf seine Seitenlänge, die Größe seiner Winkel und die Größe seiner Fläche,
- Überlegungen zu den geometrischen Abbildungen Spiegelung, Drehung, Verschiebung und Schubspiegelung bei der Herstellung eines Parketts (was die Kongruenzbetrachtungen anbahnt), also das Erkennen, Benennen und Darstellen dieser Abbildungen
- Überlegungen zu den entsprechenden Symmetrieeigenschaften des Parketts,
- Überlegungen zur Längen- und Flächeninvarianz beim Abändern der Form eines Parkettsteins etwa durch die „Knabbertechnik“,
- Kombinatorische Überlegungen beim Färben eines Parketts.

Beim ersten Betrachten ist es zunächst oft die Periodizität des Parketts, welche die Kinder fasziniert. Die Frage nach den sich wiederholenden Teilen führt zu Betrachtungen von ebenen Figuren, zu deren Klassifizierung und zu Überlegungen, ob die eine oder andere ebene Figur allein oder in Kombination mit anderen Figuren parkettiert. In engem Zusammenhang damit werden in der Regel zunächst die Translationssymmetrie, Achsensymmetrien und danach weitere Symmetrien des Parketts entdeckt.

Beim Parkettieren können die Seite eines Parkettsteins als Maß für die auszulegende Länge, die Fläche des Parkettsteins als Maß für die auszulegende Fläche und die Winkel des Parkettsteins als Maß für den auszulegenden Winkel dienen.

Bei den Winkeln können durch das Auslegen eines Vollwinkels mit drei Sechsecksecken, vier Quadratecken oder 6 Ecken gleichseitiger Dreiecke die betreffenden Innenwinkel bestimmt werden.

¹ US Patent Nr. 4133152

Diese Idee des „Hineinpassens“ kommt auch zum Tragen, wenn der Innenwinkel des regelmäßigen Sechsecks mit dem Innenwinkel des regelmäßigen Dreiecks oder die Fläche eines regelmäßigen Sechsecks mit 6 gleichseitigen Dreiecken der gleichen Seitenlänge ausgelegt und darüber reflektiert wird.

2.2 Entwicklung der Persönlichkeit des Kindes

In der Auseinandersetzung mit Parketten erwerben die Kinder also vielfältige Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten sowie Gewohnheiten und Einstellungen, die eine tragfähige Basis für erfolgreiches Lernen nicht nur im Fach Mathematik sichern.

Zugleich besitzt die Arbeit an Parketten wesentliche Potenzen für die harmonische Entwicklung der Persönlichkeit des Kindes. Das betrifft insbesondere

- das Wecken von Neugier und Interesse an mathematischen Tätigkeiten, Objekten und Fragestellungen,
- das Wecken der Freude an mathematischen Aktivitäten speziell und an entdeckendem Lernen generell,
- die Förderung der Fantasie und der Kreativität,
- die Denk-, Gedächtnis- und Sprachentwicklung, die Entwicklung allgemeiner geistiger Fähigkeiten,
- die Befähigung zu und die Gewöhnung an ausdauernde, konzentrierte Lernarbeit,
- die Erziehung zu Genauigkeit, Sorgfalt und Eigenverantwortung und nicht zuletzt
- die Entwicklung sozialer Verhaltensweisen.

Einige dieser Punkte sollen nachfolgend konkretisiert werden:

2.2.1 Neugier, Freude, Interesse, Fantasie und Kreativität wecken

Aus der Sache heraus sollten *Neugier, Interesse und Freude* an mathematischen Aktivitäten geweckt werden, denn nicht Belohnungen, gute Noten, Lob oder Tadel, sondern vielmehr das Erkenntnisinteresse ist das stärkste, das uneigennützigste Lernmotiv. Kinder sind neugierig, sie erkunden und legen bereits in der Vorschulzeit spielerisch Parkette. Nur herausfordernde und doch zugleich bewältigbare Aufgaben können Neugier und Freude im Umgang mit Parketten aufrecht erhalten und eine auf erlebten Erfolgen basierende positive Einstellung gegenüber mathematischen Aktivitäten, Fragestellungen und Anforderungen fördern.

Möglichkeiten dazu bieten sich viele: Das beginnt beim Sammeln, Sortieren und Ausstellen von Fotos und Skizzen einer Vielfalt von „Mustern auf unseren Wegen“ beispielsweise im Rahmen eines Projektes.

Insbesondere herausfordernde, ungewöhnlichen Parkette wie sie oft beim Wegebau eingesetzt werden, die nicht nur aus Rechtecken bestehen oder in denen die Rechtecke nicht wie in einer Mauerwand angeordnet sind, regen die Kinder an, Symmetrien zu finden sowie weitere ähnlich attraktive Parkette

zu erfinden und zu zeichnen. Werden bei solchen Parketten die Ränder betrachtet, stellen die Kinder fest, dass beim Verlegen des Parketts am Rand fast immer gesägt werden muss. Die Frage, warum derartige Parkettsteine dennoch häufig eingesetzt werden, drängt sich auf. Ihre Beantwortung erfordert praktisches Tun, nämlich derartige Parkettsteine in die Hand zu nehmen und festzustellen, dass sie – im Gegensatz etwa zu quadratischen Kacheln – im Parkett nicht einfach gegeneinander verschoben werden können.



Beim Finden, Zeichnen und Färben ästhetisch anspruchsvoller Parkette werden Fantasie und Kreativität geweckt. Hier stehen beispielsweise folgende Fragen im Mittelpunkt:

- Welche Parkettierungen sind optisch attraktiv?
- Wie aufwändig mag das Anfertigen des Parketts sein?
- Welche Parkettierungen sind praktisch, welche sind weniger praktisch?
- Warum kommen in der Umwelt so häufig rechteckige, insbesondere quadratische Parkett vor?
- Kann man mit Dreiecken und Vierecken ganz beliebiger Form parkettieren?
- Mit welchen anderen Formen kann man lückenlos parkettieren?
- Parkettieren auch konkave Vierecke?

2.2.2 Motivation aus der Sache heraus

Bemerkenswert ist, dass die Arbeit mit Parketten zwar von den Kindern in hohem Maße Konzentration, Ausdauer und Geduld erfordert und diese zugleich fördert, dass die Kinder hier in der Regel aber dennoch sehr gern, ausdauernd und mit hoher Motivation arbeiten. Die Ursachen dafür sind vielfältig. Zum einen werden Kinder von der ästhetischen Wirkung der Parkette angesprochen und sind immer wieder insbesondere von recht anspruchsvollen Parketten fasziniert. Zum zweiten ist es die Wiederholung der Tätigkeit, auf die sich Kinder gern einlassen. Das, was sie erkannt haben und was ihnen gelingt, machen Kinder mit Freude wieder und wieder mit wachsender Perfektion und Schnelligkeit. Zum dritten übt das Erfinden von möglichst schönen, ungewöhnlichen oder gekürzt und verteilt auf 3 Beiträge erschienen in: Grundschule Mathematik 22 (2009)

komplizierten Parketten für viele Kinder einen hohen Reiz aus. Nicht zuletzt ist die Arbeit mit Parketten gerade für Kinder mit sprachlichen Problemen eine gute Möglichkeit, sich nonverbal auszudrücken und eine Leistung zu präsentieren, die nicht durch mangelnde Sprachbeherrschung abgewertet wird.

2.2.3 Gedanklich-theoretischer Aspekt des Arbeitens mit Parketten

Ob beim Legen, Kleben oder Zeichnen: Werden Parkette fortgesetzt oder erfunden ist die äußere Handlung für die Kinder Anlass zu geistiger Aktivität. Einzelne Figuren sind vor dem Hintergrund zu erfassen, Muster und Gesetzmäßigkeiten sind zu erkennen. Abstrahierend und Verallgemeinernd wird Gleiches als gleich erkannt und von Ungleichen abgegrenzt. Das betrifft zunächst die Farben und die Formen der verwendeten Parkettsteine, später deren Anordnung und Periodizität und in Verbindung damit die strukturellen Eigenschaften des Parketts (beispielsweise werden alle Parkette als strukturgleich erfasst, in denen Translationen und eine gleiche Anzahl von Achsenspiegelungen vorkommen). Die Kinder abstrahieren und verallgemeinern ausgehend vom konkreten Parkett, erfassen dessen Symmetrieeigenschaften und konkretisieren diese beispielsweise beim Fortsetzen des Parketts. Der gedanklich-theoretische Aspekt bezieht sich schließlich auch auf die Frage ob und wie bestimmte Steine parkettieren und auf die Art und Weise der Ausführung des Parkettierens: Wer das Wesen des Parketts mit all seinen Symmetrien erkannt hat, kann es auf ganz anderem Niveau fortsetzen.

2.2.4 Sprachentwicklung,

Wenn Kinder beispielsweise ausgehend vom Parkett verallgemeinern, dessen Gesetzmäßigkeit erfassen und diese beim Fortsetzen des Parketts konkretisieren, wird all das von sprachlichen Äußerungen begleitet und durch sprachliche Äußerungen gefördert. Wer Kinder beim gemeinsamen Spielen mit Parkettsteinen beobachtet, stellt rasch fest, inwieweit sie

- Farben und Formen (Dreieck, Viereck, Kreis, ...),
- Lagebeziehungen (oben, unten, ..., über ..., unter ..., rechts, links, rechts von ..., links von, zwischen) und
- Größenvergleiche
- Prozesse

identifizieren (erfassen), realisieren (herstellen) und sprachlich beschreiben können.

Sprachliche Äußerungen werden notwendig, wenn gemeinsam auf spielerische Weise Parkette hergestellt werden. Kinder erklären einander Beobachtungen, begründen Handlungen („Das muss man so legen, weil ...“). Sie werfen Fragen auf, stellen Vermutungen an, prüfen diese handelnd und diskutieren über ihre Beobachtungen und Überlegungen mit anderen Kindern. Wenn beispielsweise gemeinsam Parkettsteine hergestellt und verlegt werden sollen, sind sprachliche Äußerungen aus der Sache heraus notwendig und werden durch den Bezug zum konkreten Gegenstand, durch die

Handlung mit den Parkettsteinen angeregt und erleichtert. Das ist insbesondere für Kinder mit geringen sprachlichen Fähigkeiten förderlich.

An vielen Stellen muss argumentiert werden:

- Warum wird ein konkreter Stein parkettieren?
- Kann man das schon an einem einzigen Stein sehen oder muss man dazu erst probieren, ein Parkett aus mehreren solcher Steine zu legen?
- Wie kann ein Parkettstein durch „Knabbern“ zu einem anderen verändert werden und wie nicht?
- Wie geht das Parkett weiter?
- Welche Farbe hat der nächste Parkettstein?

Diese und andere Fragen sind bedeutsam, sobald die Kinder gemeinsam arbeiten. Sie fördern deshalb die Bereitschaft und die Fähigkeit zum Argumentieren.

Die Qualität der sprachlichen Äußerungen der Kinder kann allerdings nur dann erhöht werden, wenn einer der Mitspieler sprachliche Kompetenz einbringt, sprachliche Äußerungen anregt, anleitet und korrigiert. Nur dann werden die Kinder die genannten Objekt- und Relationsbegriffe ebenso wie die Fähigkeit zum Beschreiben und Begründen im „Sprachspiel“ erwerben. Wir beobachteten Kinder², die im Gespräch die Farbe „Lila“ nur mit dem Wort „schöne Farbe“ bezeichneten, die zu einem spitzwinkligen Dreieck nicht Dreieck sondern „Pfeil“ sagten und einander verstanden. Sie kannten das Wort „Lila“ nicht und wussten nicht, dass auch spitzwinklige Dreiecke Dreiecke sind. Erst in der Kommunikation mit einem sprachlich kompetenteren Mitspieler werden sie diese Bezeichnungen ändern. Es reicht deshalb nicht aus, Kinder nur miteinander spielen zu lassen. Immer wieder sollte sich die Erzieherin bzw. die Lehrerin an Diskussionen einzelner Gruppen beteiligen, Kinder zum öffentlichen Sprechen herausfordern und nicht zuletzt klassenöffentlich den einen oder anderen Sprachgebrauch nutzen und hervorheben. Sie sollte zugleich geduldig Erklärungen aus der Sache heraus einfordern.

2.2.5 Handwerklich-praktische Fertigkeiten sichern

Wie bei vielen anderen Tätigkeiten, spielen auch beim Arbeiten mit Parketten sowohl der handwerklich-praktische als auch der gedanklich-theoretische Aspekt eine Rolle.

Beide Aspekte bedingen einander: Handwerklich praktische Fähigkeiten sind unverzichtbare Voraussetzungen für erfolgreiches Arbeiten mit Parketten. Diese Fähigkeiten und Fertigkeiten erlauben es den Kindern, sich beim Herstellen oder Fortsetzen von Parketten auf das Wesentliche, nämlich die im Parkett enthaltenen Symmetrien und deren Realisierung zu konzentrieren.

Speziell beim Arbeiten mit Parketten sind immer wieder äußere Handlungen wie Schneiden, Zeichnen, Legen, Kleben usw. ausführen. Diesbezüglich ist die systematische Entwicklung von Fertigkeiten im handwerklich-praktischen Sinne unverzichtbar, denn Freude an der Arbeit und an guten Ergebnissen

² EGOS, durchgeführt 2003 und 2004 mit Schulanfängern in den letzten 8 Wochen vor der Einschulung in den Ballungsräumen Hamburg, Halle und Rostock.

werden auf Dauer nur jene Kinder haben, denen brauchbare und optisch ansprechende Ergebnisse gelingen.

Vom ersten Schultag an sollten die Kinder deshalb immer wieder differenzierend Gelegenheit erhalten, mit Lineal und frei Hand zu zeichnen, zu färben und auf dem Riss zu schneiden. Zweifellos erfordert das Zeit, weil nur der wiederholte Vollzug von gleichartigen Handlungen die erforderlichen Fertigkeiten sichert. Was im Sport oder beim Erlernen eines Musikinstruments als selbstverständlich akzeptiert wird, darf im Fach Mathematik nicht zur Disposition gestellt werden: Gelungene und optisch ansprechende Ergebnisse sind in hohem Maße von entwickelter Fertigkeiten abhängig. Die damit einhergehende systematische und langfristig angelegte Befähigung zu und Gewöhnung an länger andauernde Lernarbeit erfordert ein sehr differenzierendes Eingehen auf die unterschiedlichen Niveaus der Kinder. Das wird insbesondere in den Klassen 1 und 2 bedeuten, einerseits Material zum Legen der Parkette einzusetzen, andererseits aber auf die Entwicklung von Fertigkeiten nicht zu verzichten, indem beispielsweise ein mit Material gelegtes Parkett mit einer Zeichnung protokolliert wird.

Legen und Zeichnen

Das zeichnerische Anfertigen von Parketten hat den Vorteil, dass es ohne großen Vorbereitungsaufwand frei Hand, mit Lineal oder Zeichenschablonen auf weißem oder Gitterpapier möglich ist. Zudem kann das Parkett beliebig groß gezeichnet werden. Ein unübersehbarer Nachteil gerade im Anfangsunterricht besteht darin, dass Fehler de facto „protokolliert“ sind. Ob Radieren oder Übermalen: Die Korrektur ist zu sehen und beeinträchtigt die Wirkung des fertigen Parketts. Damit wird experimentelles Arbeiten, welches Probieren, Versuchen und Irren einschließt, erschwert.

Demgegenüber erleichtert die Arbeit mit Parkettsteinen, die ja immer wieder rasch neu und anders gelegt werden können, das experimentelle Arbeiten. Die Kinder können vermuten ob eine Figur parkettiert, sich die Fortsetzung einer Parkettierung vorstellen, diese Vermutungen und Vorstellungen prüfen und gegebenenfalls korrigieren. Dabei sollten die Kinder stets die Möglichkeit haben und daran gewöhnt werden, ihre Ergebnisse mit einer Skizze zu protokollieren, um sie für spätere Reflexion der Arbeit etwa im Rahmen der klassenöffentlichen Diskussion parat zu haben. Die Arbeit mit Parkettsteinen ermöglicht Kinder zudem eine viel direktere Handlungserfahrung: Das exakte Aneinanderpassen von Seiten, das Einpassen von Ecken oder auch die Kongruenz von Parkettsteinen sind unmittelbar taktil erfahrbar.

Die Herstellung von Parkettsteinen in Gruppenarbeit durch Zeichnen und Schneiden aus Karton bzw. durch Zerschneiden verschieden farbiger quadratischer Zettel eines Zettelblocks ist eine gute Gelegenheit, sowohl die handwerklichen Fähigkeiten beim Zeichnen und Schneiden zu fördern als auch das experimentelle Arbeiten zu ermöglichen

3 Beim Arbeiten mit Parketten Lernvoraussetzungen sichern

3.1 Parkettieren im Spiel

Parkette eignen sich sehr gut zur spielerischen Auseinandersetzung des Kindes mit der Umwelt und zugleich zur planmäßigen Sicherung von Voraussetzungen erfolgreichen Lernens. Entsprechend spielt die Arbeit mit Parketten bereits im Kleinkindalter eine Rolle. Einsiedler (1999) verweist darauf, wie wichtig es ist, dass das Kind einen Begleiter beim Spielen hat, der

- ihm bewusst, planmäßig und systematisch Anregungen gibt,
- das Spiel anreichert,
- ihm Arbeitstechniken vermittelt,
- sprachliche Äußerungen aus der Sache heraus fördert,
- dem Kind die Freude an der Auseinandersetzung mit dem Spiel *vorlebt* und
- mit dem Kind Erfolg und positive Emotionen teilt.

Andernfalls sind noch so schöne Parkettsteine wirkungslos und verlieren schnell ihren anfänglichen Reiz. Die verschiedenen Formen des Spiels sind in unterschiedlicher Weise anregend für die Entwicklung der Persönlichkeit des Kindes. Zugleich kann in diesen Spielformen recht gut beobachtet werden, inwieweit das Kind hier über Kompetenzen verfügt. Dabei muss allerdings beachtet werden, dass zwar der beobachtete Verlauf einer Tätigkeit Aufschluss darüber geben kann, dass das Kind beispielsweise divergent denken kann, aber aus dem Nichteintreten eines bestimmten Tätigkeitsverlaufs nicht ohne weiteres darauf geschlossen werden kann, dass das Kind dazu prinzipiell nicht in der Lage ist. Zu viele andere Faktoren können dafür verantwortlich sein.

Beim Parkettieren kommt es je nach Situation zum freien Objektspiel, zum Rollenspiel oder zum Konstruktionsspiel.

Das freie **Objektspiel** mit verschiedenen Parkettsteinen fördert divergentes Denken, Kreativität und die Fähigkeit zu vorausschauendem Planen. Die Kinder können vielfältige Möglichkeiten sehen und unterschiedliche Parkette aus einem Satz von Parkettsteinen erzeugen.

Das **Rollenspiel**, bei dem ein Kind etwa die Rolle eines Parkettlegers oder Fliesenlegers einnimmt, welcher entsprechend eines bestimmten Auftrags beispielsweise einen Weg pflastern soll, fördert die allgemeinen geistigen Fähigkeiten sowie die sprachlichen Fähigkeiten des Kindes. Das vorgegebene Parkett ist zu analysieren, seine Gesetzmäßigkeit ist zu entdecken und beim Fortsetzen des Parketts entsprechend zu konkretisieren. Wenn Geber und Nehmer kooperieren, kommt es zu sprachlichen und sozialen Interaktionen. Sind die Rollen vereinbart, lernen die Kinder, einander zumutbare Aufgaben zu stellen, sich Tipps zu geben und sich gegenseitig beim Tun zu beobachten.

Das **Konstruktionsspiel**, welches beispielsweise dann zustande kommt, wenn Kinder nach einer Vorlage Parkette legen, fördert vor allem die Aufmerksamkeit und Konzentration der Kinder. Figuren sind vor dem Hintergrund zu erfassen, Parkettsteine sind in der richtigen Form, Farbe und Größe auszuwählen und schließlich entsprechend der Vorlage anzuordnen.

3.2 Beobachtungsschwerpunkte

Beim Arbeiten mit Parketten wird schnell deutlich,

- inwieweit das Kind feinmotorische Fähigkeiten zum Legen, Zeichnen, Schneiden besitzt,
- über welche sprachlichen Fähigkeiten das Kind verfügt,
- welche Begriffe (Farben, Formen, Lagebeziehungen) das Kind bereits beherrscht,
- ob das Kind beim Legen und Zeichnen von Parkettierungen die Parkettierung als Ganzes übersieht oder Stein für Stein probierend arbeitet,
- ob das Kind beim Zeichnen die Form der Parkettsteine als Ganzes (z. B. als ein Haus, einen Pfeil, ein Fünfeck) erfasst hat und sie entsprechend als Ganzes zeichnet oder ob das Kind beim Zeichnen der Parkettsteine von Ecke zu Ecke zählt und sie Strich für Strich zeichnet,
- ob das Kind erst alle Unrisse malt und dann – das Parkett überschauend – immer gleich mehrere Parkettsteine einer Farbe einfärbt oder ob das Kind bei jedem Parkettstein den Stift wechselt und von neuem über die Farbe des Steins nachdenkt,
- ob das Kind beim Zeichnen auf einem Punktgitter die Form der Parkettsteine als Ganzes (z.B. als ein Haus, einen Pfeil, ein Fünfeck) erfasst hat und sie entsprechend als Ganzes zeichnet oder ob das Kind beim Zeichnen der Parkettsteine von Ecke zu Ecke zählt und sie Strich für Strich zeichnet
- ob und wie das Kind die im Parkett enthaltenen Symmetrien beschreibt.

Die folgenden Abbildungen zeigen die beträchtlichen Niveauunterschiede beim Erfassen von Parkettierungen und beim Zeichnen im zweiten Halbjahr der Klasse 2. Die Vorgaben waren immer gelegte oder gezeichnete, recht komplexe Vorlagen, auf denen die Kinder nicht unmittelbar fortsetzen konnten.

Irina hat mit T-Plättchen gelegt und das Muster anschließend protokolliert (Abb. 2). Es fällt ihr aber offensichtlich noch schwer, die wahrgenommene Form korrekt wiederzugeben. Max setzt die mit gelben und roten L-Plättchen gelegte Ausgangsfigur (Abb. 3) nicht zu einer Parkettierung fort. Da er eine mit T-Plättchen gelegte Ausgangsfigur in eine Richtung richtig fortsetzt (Abb. 4), war er möglicherweise bei den L-Plättchen stärker daran interessiert, ein größeres Rechteck zu legen. Auffallend ist auch, dass sein Rechteck - sieht man von den Farben ab - achsensymmetrisch ausgelegt ist. Lucia gelingt es bis auf einen kleinen Fehler recht gut die recht komplexe, auf einem Blatt vorgegebene Ausgangsfigur - zwei rote und zwei blaue Fünfecke - in eine Richtung fortzusetzen (Abb. 5).

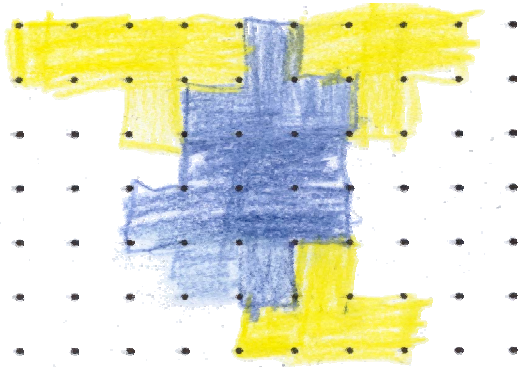


Abb. 2: Irina hat noch Mühe, die T-Plättchen korrekt wiederzugeben

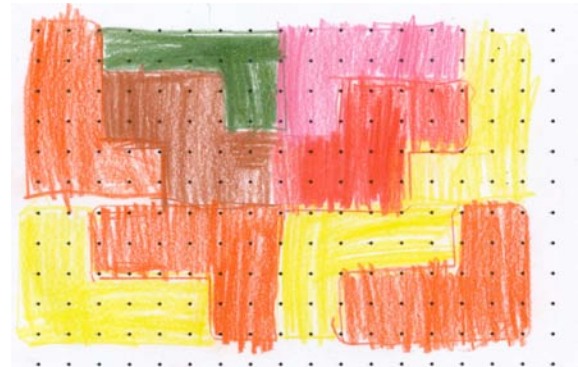


Abb. 3: Max gelingt es noch nicht, die Ausgangsfigur aus gelben und roten L-Plättchen zu einer Parkettierung fortzusetzen.



Abb. 4: Max kann die angefangene Parkettierung in eine Richtung fortsetzen, seine motorische Leistung kann noch verbessert werden.

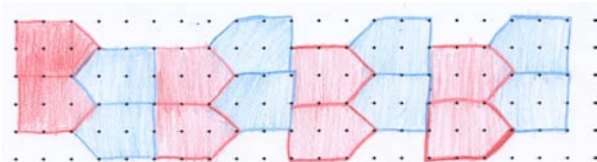


Abb. 5: Lucia zeichnet recht genau, beim Fortsetzen in eine Richtung unterläuft ihr ein kleiner Fehler.

Dario hat eine angefangene Parkettierung aus zwei verschiedenen Quadraten nach Vorlage erfasst, abgezeichnet und richtig fortgesetzt (Abb. 6). Auch Vanessa erfasst das Wesen der Parkettierung korrekt - zwei rote und zwei grüne Boote waren vorgegeben - und setzt passend fort (Abb. 7).

Unbefriedigend für das zweite Halbjahr der Klasse 2 ist bei einigen Arbeiten das zu gering entwickelte feinmotorische Können beim Zeichnen.

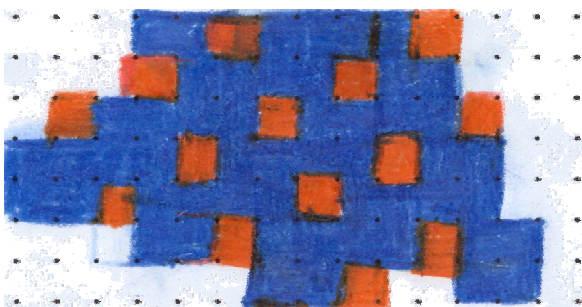


Abb. 6: Dario setzt richtig fort, die Zeichengenauigkeit muss er noch verbessern

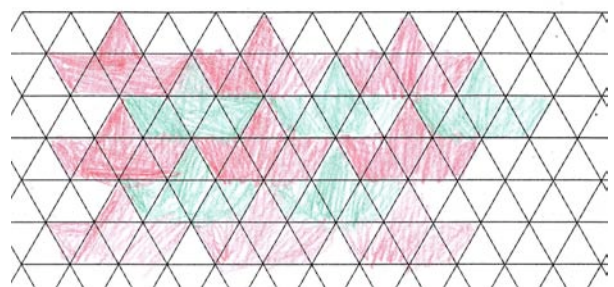


Abb. 7: Vanessa setzt passend fort.

3.3 Möglichkeiten zur Förderung der Kinder

Kinder sollten vom Kindergartenalter an die Möglichkeit haben, Parkettierungen zu legen, fortzusetzen und ihr Tun zu protokollieren. Dabei ist die Verwendung von quadratischem Punktraster, dreieckigem Punktraster und dreieckigem Linienraster empfehlenswert. Wichtig ist, dass zumindest anfangs die Größe des Gitters zur Größe der zu legenden Teile passt. So können die Kinder die Parkettsteine auf das Gitterpapier auflegen und gegebenenfalls zunächst auch umfahren. Während anfangs Parkettierungen aus Quadraten gezeichnet und dazu mit Würfeln passende Parkettierungen gelegt werden, spielen später Parkettierungen mit verschiedenen großen Quadraten sowie mit Rechtecken eine Rolle.

Erfahrungsgemäß fallen den Kindern Parkettierungen leicht, bei denen die Parkettsteine einprägsame Figuren sind: Haus, Pfeil, Boot usw. werden von den Kindern schnell ganzheitlich erkannt und reproduziert (Abb. 5, Abb. 7).

Es bedarf umfangreicher Übungen, um die erforderlichen Fertigkeiten zu entwickeln und die derzeit zu beobachtenden oft ungerechtfertigten und sehr gravierenden Leistungsunterschiede im feinmotorischen Bereich sowie im Bereich der Wahrnehmung und Reproduktion der Formen abzubauen. Kompliziertere Parkettierungen mit höherem Schwierigkeitsgrad sollten sich anschließen.

4 Schlussbemerkungen

Das Arbeiten mit Parketten ist ein äußerst vielfältiges Thema. Parkettierungen können sehr gut immer wieder erneut aufgegriffen und unter einem anderen Blickwinkel, aus anderer fachlicher Perspektive betrachtet werden. Die Arbeit mit ihnen eignet sich deshalb sehr gut für eine spiralförmige Anlage des Unterrichts.

Dabei ist es unverzichtbar, immer wieder die äußere Handlung – also das Legen und Zeichnen von Parketten – mit Anforderungen an die geistige Tätigkeit der Kinder zu verbinden: Vergleichen, Abstrahieren, Verallgemeinern usw. Der Begriff Quadrat beispielsweise wird von Kindern eben nicht dadurch erworben, dass sie mit quadratischen Plättchen ohne Reflexion über deren Form parkettieren: Das Vergleichen von Seitenlängen und Winkeln ist unverzichtbar. Es gilt in diesem Sinne sowohl die Kindperspektive als auch die Fachsystematik im Auge zu behalten, immer wieder zu prüfen, welche Lernziele bei der einen oder anderen Aktivität an Parketten realisierbar sind und welche fachlichen Inhalte auch der Sekundarstufe angebahnt werden können.

Der Erfolg wird dann nicht ausbleiben, wenn die Arbeit langfristig und planmäßig erfolgt und die Kinder

- an Parketten arbeiten, die ihnen subjektiv bedeutsam sind,
- zunächst an einfach zu erfassenden Parketten Arbeitstechniken erwerben,
- dabei geeignete Arbeitsmittel benutzen,
- genügend Anleitung und ausreichend Zeit zu sauberem Arbeiten erhalten,
- durch wiederholtes Ausführen der Tätigkeit handwerklich-praktische Fähigkeiten und Fertigkeiten

- erwerben,
- die Auswahl unter einer Vielzahl von interessanten, herausfordernden und ästhetisch schönen Parketten unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades haben,
- immer wieder herausgefordert werden, ihre Arbeit darzustellen, zu beschreiben, zu begründen und nicht zuletzt
- von Anfang an viele Gelegenheiten erhalten, Parkette selbst zu erfinden.

Wir wünschen ihnen beim Experimentieren an Parketten – erst für sich und dann mit den Kindern – reiche Entdeckungen, Geduld, viel Freude und vor allem Lernerfolge neugieriger und hoch motivierter Kinder.

Literatur

- Besuden, H.: Geometrie mit Winkelplättchen. - Seelze: Kallmeyer, 2005
- Devlin, K.: Muster der Mathematik, Spektrum Akademischer Verlag 1994.
- Eichler, K.-P. & al: Felix und Felicitas. – Arbeitsheft Geometrie für die Klassen 1/2. - Braunschweig: Westermann, 1998
- Eichler, K.-P. & al: Felix und Felicitas. – Arbeitsheft Geometrie für die Klassen 3/4. - Braunschweig: Westermann, 1996
- Eichler, K.-P.: Geometrische Vorerfahrungen von Schulanfängern. – In: Praxis Grundschule 27(2004)2
- Einsiedler, W.: Das Spiel der Kinder. – Bad Heilbrunn / Obb.: Klinkhardt, 1999
- Flachsmeyer, J.; Feiste, U.; Manteuffel, K.: Mathematik und ornamentale Kunstformen – Leipzig: Teubner, 1990
- Grünbaum, B; Shephard, G.C.: Tilings and patterns. –New York: Freeman & Co, 1987
- Klotzek, B.: Kombinieren, parkettieren, färben. – Köln: Aulis, 1985
- Lorenz, J. H.: Parkettierungen. Von Quadraten zu Escher. In: Grundschule, H. 2 (1991). S. 16-19.
- Lorenz, J. H. (Hrsg.): Mathematikus Klasse 1. – Braunschweig: Westermann 2006
- Lorenz, J. H. (Hrsg.): Mathematikus Klasse 2. – Braunschweig: Westermann 2006
- Lorenz, J. H. (Hrsg.): Mathematikus Klasse 3. – Braunschweig: Westermann 2007
- Lorenz, J. H. (Hrsg.): Mathematikus Klasse 4. – Braunschweig: Westermann 2007
- Penrose, Roger: Set of tiles for covering a surface. – US Patent Nr. 4133152 vom 9.01.1979 – online unter:
<http://v3.espacenet.com/publicationDetails/biblio?CC=US&NR=4133152&KC=&FT=E> (letzter Aufruf: 14.05.2009)
- Radatz, H.; Rickmeyer, K.: Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel, 1991.
- Tarassow, L. W.: Symmetrie, Symmetrie. – Berlin/Heidelberg: Spektrum Verlag, 1999